拉普拉斯方程引论

Anqiao Ouyang

October 29, 2024

1 引言

拉普拉斯方程是一种偏微分方程，又称位势方程、调和方程。拉普拉斯方程在数学和物理中有举足轻重的地位，例如我们耳熟能详的复分析中的调和函数理论、傅里叶分析、以及变分法等，都经常出现它的身影。

最近我做的内容稍微涉及了相关的知识，故顺便写篇短文。本文将简述拉普拉斯方程的定义及其基本形式，介绍其常见的、简单的解法和用途。

2 基础概念

2.1 连续拉普拉斯算子

那我们首先谈谈拉普拉斯算子。

我们知道梯度（Gradient）是一个向量场，表示函数中各方向上的最大变化率。在一个n 维欧氏空间中，一个光滑的标量函数的梯度定义为

$$\nabla f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle$$

而拉普拉斯算子（Laplace operator）是n 维欧氏空间中的一个二阶微分算子，对于一个光滑的标量函数f，其拉普拉斯算子被定义为**梯度的散度**

$$\Delta f = \nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f$$

以下给出在二维和三维空间中的拉普拉斯算子，在常见的坐标系下的形式，这些都是非常基础且常用的，读者应当熟记。

2.1.1 二维空间

在二维空间中，拉普拉斯算子的笛卡尔坐标系表示为

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

极坐标系表示为

$$\Delta f=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}$$

抛物线坐标系表示为

$$\frac{1}{u\nu\left(u^2+\nu^2\right)}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(u\nu\frac{\partial f}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial\nu}\left(u\nu\frac{\partial f}{\partial\nu}\right)\right]+\frac{1}{u^2\nu^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}$$

2.1.2 三维空间

在三维空间中，拉普拉斯算子的笛卡尔坐标系表示为

$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

圆柱坐标系表示为

$$\Delta f=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

抛物柱面坐标系表示为

$$\frac{1}{u^2+v^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

球面坐标系表示为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\phi}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\sin\phi\frac{\partial f}{\partial\phi}\right)$$

2.1.3 对称性与自伴随性

回顾一下，我们知道一个线性算子A 是对称的，意味着着希尔伯特空间内，它满足对于所有的$f,g\in\mathrm{Dom}(A)$ 有$\langle Af,g\rangle=\langle f,Ag\rangle$。对称算子是自伴随算子的一个弱化条件，只要求在定义域内保持内积对称性，并不要求在全体空间中自伴随。对于拉普拉斯算子Δ，我们一般将其定义在一个适当的函数空间上，如L^2 空间中的$H_0^1(\Omega)$，其中的Ω 是一个有界区域。这时，拉普拉斯算子Δ 是对称的。

一个线性算子A 是自伴随的，当且仅当它是对称的，并且其定义域与其伴随算子的定义域是相同的。在通常的边界条件下，比如狄利赫雷边界条件（$f=0$ 在边界上），拉普拉斯算子是自伴随的。这是因为这样的边界条件确保Δ 的定义域和其伴随算子的定义域相同。

某些算子在其初始定义域上并非自伴随，但可以通过扩展定义域使其自伴随。举个简单常见的例子，在希尔伯特空间中，自伴随扩展的一个经典方法涉及缺口空间（deficiency space）和缺口指数，对于一个对称算子，我们定义缺口空间

$$\mathcal{K}_{\pm} = \ker\left(A^* \mp iI\right)$$

缺口空间的维数$d_{\pm} = \dim(\mathcal{K}_{\pm})$ 被称为算子的缺口指数，有三种情况可以判断：

1. 如果$d_+ = d_- = 0$，则A 是自伴随的，不需要扩展。
2. 如果$d_+ = d_-$，则A 有可能通过某种扩展变为自伴随。具体的扩展会在不同的边界条件下给出。
3. 如果$d_+ \neq d_-$，则A 无法扩展为自伴随算子。

至于更具体的分析和拓展的例子，以后有机会可能会在泛函分析专栏的线性算子理论详细讨论。好让我们接着看拉普拉斯方程。

2.2 定义

拉普拉斯方程归结于求解对实变量x, y, z 二阶可微连续到边界的实函数，形如

$$\Delta f = 0$$

拉普拉斯方程的解被称为调和函数。调和函数的性质很好，也是数分的熟面孔了，后续我们将在复分析的文章详细讨论调和函数的性质及相关定理。

2.2.1 位势场

顺便提一嘴。位势场（Potential Field）是一种标量场或向量场，它在空间中每一点的值代表某种"势"，如重力势、电势或温度场。一个位势场通常由一个标量函数定义，例如在物理中我们有位势函数ψ，场强可以被表示为

$$\vec{F} = -\nabla\psi$$

这不重要。重要的是在描述无源（或无电荷、无质量等分布的）区域的场时，位势函数通常满足拉普拉斯方程。这意味着在一个无源的静电场或重力场中，位势分布在空间中不会发生变化，表现出稳定的状态。故满足拉普拉斯方程的位势函数被称为调和函数，在其定义域内没有局部极值。

2.3 定解问题与外问题

拉普拉斯方程的定解问题（有时称为内部问题）和外问题之间的区别主要在于问题定义的区域范围和边界条件的不同。

我们研究封闭或半封闭系统内部的物理现象，例如管道内的流体流动、建筑物内部的温度分布、绝缘区域内的电场等，常用的是定解问题。定解问题通常涉及一个有限的区域，我们需要在有限区域的边界上定义边界条件。

而外问题涉及一个无限或半无限的区域，通常是整个空间减去一个有界的区域。例如研究无限空间中区域外的场，如电荷在无穷大空间中的电场分布、声源或热源在开放区域外部的传播问题，亦或是当研究声学、热传导或静电场的外部问题时，通常要求解在无穷远处衰减为零或趋于

常数。外问题的边界条件通常在无穷远处指定，常见的情况有Dirichlet 外问题和Neumann 外问题。

有时为了将定解问题和外问题区别，我们有时也把第一、二边值问题分别称为Dirichlet 内问题和Neumann 内问题。

2.4 通解

再谈谈拉普拉斯方程的通解。

齐次拉普拉斯方程的通解可以由分离变量法得到。我们以三维空间为例，分别讨论不同坐标系下的情况。

2.4.1 笛卡尔坐标系

给定拉普拉斯方程

$$\Delta f(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

其解可以写为各变量分离的形式

$$f(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

我们直接将其带入方程

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}Y(y)Z(z) + \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}X(x)Z(z) + \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial x^2}X(x)Y(y) = 0\\ \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}\frac{1}{X(x)} + \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}\frac{1}{Y(y)} + \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial x^2}\frac{1}{Z(z)} = 0\end{aligned}$$

在这个方程中，x, y, z 均为独立变量，因此每一项必须等于一个常数。我们引入仨分离常数$-k_x^2, -k_y^2, -k_z^2$，可以推得方程的通解为

$$\begin{aligned}X(x) = A_1\cos(k_x x) + A_2\sin(k_x x)\\ Y(y) = B_1\cos(k_y y) + B_2\sin(k_y y)\\ Z(z) = C_1\cos(k_z z) + C_2\sin(k_z z)\end{aligned}$$

或者干脆直接写成

$$f(x,y,z) = e^{\pm ik_x x}e^{\pm ik_y y}e^{\pm ik_z z}$$

2.4.2 圆柱坐标系

我们知道用圆柱坐标的拉普拉斯算子表示为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$$

$$\frac{1}{rR}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2 f}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}+\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}=0$$

用分离变量法推导是同理的，我们引入分离常数$-k_r^2, -k_\theta^2, -k_z^2$ 使得

$$\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}=k_z^2$$

接下来，我们得到

$$\frac{1}{rR}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R}{\partial r}\right)=k_r^2$$

和

$$\frac{1}{r^2 f}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}=k_\theta^2$$

将上述方程代入拉普拉斯方程，我们可以将其分解为三个独立的方程。对于$Z(z)$ 的方程：

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}-k_z^2 Z=0$$

其通解为

$$Z(z)=Ae^{k_z z}+Be^{-k_z z}$$

对于$R(r)$ 的方程：

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R}{\partial r}\right)-k_r^2 rR=0$$

这个方程可以通过设$R(r)=r^m$ 的形式得到解决，从而通解为

$$R(r)=CJ_m(k_r r)+DY_m(k_r r)$$

其中J_m 和Y_m 是第一类和第二类贝塞尔函数。

对于$f(\theta)$ 的方程：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}+k_\theta^2 f=0$$

其通解为

$$f(\theta) = E\cos(k_\theta \theta) + F\sin(k_\theta \theta)$$

综合上述结果，我们可以得出拉普拉斯方程在圆柱坐标系中的通解为

$$\begin{aligned} f(r,\theta,z) &= R(r)f(\theta)Z(z) \\ &= \left(CJ_m(k_r r) + DY_m(k_r r)\right)\left(E\cos(k_\theta \theta) + F\sin(k_\theta \theta)\right)\left(Ae^{k_z z} + Be^{-k_z z}\right) \end{aligned}$$

2.5 解析函数

在复变函数论中我们学过解析函数的定义，我们知道它是指一个在区域上处处可导的函数。如果一个复函数$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 在某个区域内满足柯西-黎曼条件，则它是解析的

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

而前面提到了，如果一个实函数$u(x,y)$ 在某个区域内满足拉普拉斯方程（即$\Delta u = 0$），那么u 是一个调和函数。假设$u(x,y)$ 是调和函数，则存在一个唯一的函数$v(x,y)$，使得$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 是解析的。这个函数v 也满足拉普拉斯方程。

所以说，若一个函数是解析的，则它的实部和虚部都满足拉普拉斯方程。

3 经典解法

3.1 分离变量法（边界条件）

就如前文的推导一样，在分离变量法中，我们假设解可以分解为每个独立变量的乘积形式，这种方法将原始的偏微分方程转换为多个普通微分方程，简化解题过程。本身这个方法非常基础，在去年的微分方程文章，我已经写过对普通微分方程进行分离变量的方法了，故本节省略¡sub¿（实在不行你看看上一章第三节的推导）¡/sub¿。

但是在解决具体问题时，我们往往会遇到边界条件，以进一步确定常数k 的值以及解中的系数。

3.1.1 Dirichlet 边界条件

Dirichlet 边界条件（Dirichlet boundary condition），又称“第一类边界条件”，设定了边界处解的已知值，常用于描述边界温度、电势或位移固定的情况。

定义上，对于待求解函数u、定义区域Ω 的边界$\partial\Omega$ 和解u 在边界上被强制设为的固定值f，Dirichlet 边界条件满足以下形式

$$u(x) = f(x),\ x \in \partial\Omega$$

举个例子，例如在极坐标系中，考虑一个圆形区域$r \leq R$，如果在边界$r = R$ 上有固定的电势，则条件可以描述为

$$u(R,\theta) = f(\theta)$$

为了应用分离变量法，我们假设解可以表示为以下形式

$$u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$$

将这个形式代入拉普拉斯方程的极坐标表示

$$\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = 0$$

由于左侧只依赖于r 而右侧只依赖于θ，我们可以引入分离常数k

$$\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) = -k \quad , \quad \frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = k$$

于是我们就得到了$R(r)$ 的方程：

$$r\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{dR}{dr} + krR = 0$$

这个方程是一个常见的贝塞尔方程。我们可以使用贝塞尔函数$J_n(x)$ 的形式来表示解。假设$k = \left(\frac{n}{R}\right)^2$，其中$n$是正整数，那么解可以写成

$$R(r) = A_n J_n\left(\frac{n}{R}r\right)$$

接下来，考虑$\Theta(\theta)$ 的方程：

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + k\Theta = 0$$

这是一个简单的二阶常微分方程，其解为

$$\Theta(\theta) = B_n \cos n\theta + C_n \sin n\theta$$

结合以上两部分，解的形式为

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n J_n\left(\frac{n}{R}r\right)(B_n \cos n\theta + C_n \sin n\theta)\right)$$

为了满足边界条件$u(R,\theta) = f(\theta)$，我们将$r = R$ 代入

$$u(R,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n J_n(n)(B_n \cos n\theta + C_n \sin n\theta) = f(\theta)$$

这里$J_n(n)$ 是贝塞尔函数在n 点的值。根据傅里叶级数展开，我们可以将$f(\theta)$ 展开为余弦和正弦项的线性组合

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (D_n \cos n\theta + E_n \sin n\theta)$$

通过比较系数，我们可以得到A_n, B_n, C_n 和D_n, E_n 之间的关系。这些系数可以通过傅里叶系数的计算得到

$$D_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta \, \mathrm{d}\theta, \quad E_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta \, \mathrm{d}\theta$$

最终，解的表达式可以写为：

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n J_n \left(\frac{n}{R} r \right) (D_n \cos n\theta + E_n \sin n\theta)$$

这个解满足在边界$r = R$ 上的Dirichlet 条件$u(R,\theta) = f(\theta)$，故有效地描述了圆形区域内的电势分布。

3.1.2 Neumann 边界条件

Neumann 边界条件（Neumann boundary condition）、又称“第二类边界条件”，是一种在边界上指定解的法向导数的边界条件。这种条件通常用于描述物理系统中边界处的通量、流量或梯度等情况。

定义上，对于待求解函数u、在区域Ω 的边界$\partial\Omega$ 上满足Neumann 边界条件，以及指定的边界值$g(x)$ 可以表示为

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g(x)$$

在边界$\partial\Omega$ 的法向导数$\dfrac{\partial u}{\partial n}$ 在物理意义上有很多用途，可以用于表示通过边界的热流量什么的。我们来看看使用分离变量法构造一个一维热传导方程的解，考虑一根长为L 的一维杆，温度分布由函数$u(x,t)$ 表示。假设该杆的初始温度分布为$u(x,0) = f(x)$，并且在边界$x = 0$ 和$x = L$ 处具有以下Neumann 边界条件

边界$x = 0$ 处的导数为常数q_0（表示热流）

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = q_0$$

边界$x = L$ 处的导数为零（绝热边界）

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0$$

用α 表示热扩散率，我们知道热传导方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

假设解可以分离为$u(x,t) = X(x)T(t)$，将其代入热传导方程，我们得到

$$X(x)\frac{dT}{dt} = \alpha T(t)\frac{d^2 X}{dx^2}$$
$$\frac{1}{\alpha T}\frac{dT}{dt} = \frac{1}{X}\frac{d^2 X}{dx^2} = -k$$

时间部分的方程

$$\frac{dT}{dt} + \alpha k T = 0$$
$$T(t) = Ce^{-\alpha k t}$$

空间部分的方程为

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + kX = 0$$
$$X(x) = A\cos\left(\sqrt{k}x\right) + B\sin\left(\sqrt{k}x\right)$$

然后应用边界条件$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = q_0$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = X'(0)T(t) = q_0$$

$$X'(x) = -A\sqrt{k}\sin\left(\sqrt{k}x\right) + B\sqrt{k}\cos\left(\sqrt{k}x\right)$$

在$x = 0$ 时，$X'(0) = B\sqrt{k}$，因此有

$$B\sqrt{k}T(t) = q_0$$
$$B = \frac{q_0}{\sqrt{k}T(t)}$$

应用边界条件$\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = X'(L)T(t) = 0$$

这意味着$X'(L) = 0$

$$-A\sqrt{k}\sin\left(\sqrt{k}L\right) + B\sqrt{k}\cos\left(\sqrt{k}L\right) = 0$$

代入B 的表达式，我们可以得到关于A 和k 的关系

$$-A\sqrt{k}\sin\left(\sqrt{k}L\right)+\frac{q_0}{\sqrt{k}T(t)}\sqrt{k}\cos\left(\sqrt{k}L\right)=0$$

最后显而易见地

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\left(\sqrt{k}x\right)+B_n\sin\left(\sqrt{k}x\right)\right)e^{-\alpha kt}$$

3.2 格林函数法

分离变量法通常用于区域具有对称性的情况，例如矩形、圆形或球形区域，以及边界条件适合分离的情形。而格林函数法能够处理更广泛的边界条件，包括非均匀边界条件和一些复杂的边界条件，甚至可以解决非齐次方程，适合于有源项的情况。

对于一个给定的线性微分算子L 和一个适当的域Ω，我们用delta 函数，表示在点y 处有一个单位源项。格林函数$G(x,y)$ 定义为满足以下方程的函数

$$LG(x,y)=\delta(x-y)$$

对于给定的源项$f(x)$ ，考虑在区域Ω 中的拉普拉斯方程:

$$\Delta u(x)=f(x),\quad x\in\Omega$$

$g(x)$ 是在边界上的指定值，我们有边界条件

$$u(x)=g(x),\quad x\in\partial\Omega$$

我们的第一步是构造格林函数，根据对称性和物理直觉，通常假设格林函数是对称的，即$G(x,y)=G(y,x)$。此外，可以根据区域的形状和边界条件推导出$G(x,y)$ 的形式。

来一个简单的例子，考虑在单位圆内的拉普拉斯方程，并且边界条件为$u=0$ 在边界上。在单位圆$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2<1\}$ 上，考虑拉普拉斯方程

$$\Delta u=0$$

并且边界条件为

$$u=0$$

为这个问题构造格林函数$G(x,y)$，使得对于单位圆内部的任意点$\mathbf{x}=(x_1,y_1)\in D$ 和一个源点$\mathbf{y}=(x_2,y_2)\in D$，满足

1. $\Delta G(\mathbf{x},\mathbf{y})=\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ 在D 内。2. $G(\mathbf{x},\mathbf{y})=0$ 在∂D。

对于平面拉普拉斯方程的基本解，令$\mathbf{x}=(x_1,y_1)$ 和$\mathbf{y}=(x_2,y_2)$ 是平面上的两点（默认为欧几里德距离），则基本解为

$$G_0(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -\frac{1}{2\pi}\ln|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$$

为了满足$G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 在边界上的零边界条件，我们可以引入一个反射点来构造一个满足边界条件的解。设$\mathbf{y}^* = \dfrac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|^2}$ 为点$\mathbf{y}$ 关于单位圆的反射点。于是定义修正的格林函数

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -\frac{1}{2\pi}\left(\ln|\mathbf{x}-\mathbf{y}| - \ln|\mathbf{x}-\mathbf{y}^*|\right)$$

在边界∂D 上，假设$\mathbf{x}$ 在单位圆的边界上（即$|\mathbf{x}|=1$），则$|\mathbf{x}-\mathbf{y}^*| = |\mathbf{x}||\mathbf{y}^*| = 1$。

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -\frac{1}{2\pi}\left(\ln|\mathbf{x}-\mathbf{y}| - \ln 1\right) = 0$$

因此，构造的格林函数$G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 在边界∂D 上满足$G=0$。单位圆内满足$u=0$ 边界条件的拉普拉斯方程的格林函数为

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -\frac{1}{2\pi}\left(\ln|\mathbf{x}-\mathbf{y}| - \ln\left|\mathbf{x}-\frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|^2}\right|\right).$$

3.3 变分法

能量通常可以用积分的形式表示，这种泛函极值问题被称为变分问题。对于拉普拉斯方程，变分法的基本思想是通过构造一个泛函，使得在其极值点上满足拉普拉斯方程的解。

变分法的核心在于欧拉-拉格朗日方程，考虑个泛函

$$J[u] = \int_\Omega F(x,u,\nabla u)\mathrm{d}x$$

我们假定函数u 在x 的两端点处是固定的，我们设一个微小的扰动$u+\varepsilon\eta$ 给J，然后我们就有

$$J(u+\varepsilon\eta) = \int_a^b F(x, u+\varepsilon\eta, u'+\varepsilon\eta')\mathrm{d}x$$

通过对ϵ 求导并在$\epsilon=0$ 时取极限，得到

$$\left.\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial u}\eta + \frac{\partial F}{\partial u'}\eta'\right)\mathrm{d}x$$

使用分部积分法对$\dfrac{\partial F}{\partial u'}\eta'$ 项进行处理

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial u'}\eta'\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\partial F}{\partial u'}\eta\right]_a^b - \int_a^b\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial u'}\right)\eta\,\mathrm{d}x$$

由于$\eta(a)=\eta(b)=0$，边界项消失。

将上述结果代入$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\epsilon}$ 中，得到

$$\frac{\mathrm{d}J}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial u'}\right)\eta\,\mathrm{d}x$$

为了使这个表达式对所有的$\eta(x)$ 为零，必须有

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial u'} = 0$$

如此我们得到了泛函取得极值的条件。

我们要做的第一步是构造一个能量泛函，使得当此泛函达到极值时，满足拉普拉斯方程。对拉普拉斯方程，能量泛函通常为以下的Dirichlet 能量

$$J(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 \mathrm{d}x$$

然后按照上述的内容进行变分即可，寻找使泛函达到极值的函数，再应用边界条件即可得到解。（这部分理解即可）

References

[1] Stanford University. (n.d.). *Laplace equation.*

[2] Zhejiang University, College of Mathematical Sciences. (2008). *Research on various boundary value problems.*