L_p 空间的基本性质及定理

Anqiao Ouyang

September 20, 2024

1 引言

在数学分析中，我们常常讨论的函数空间是指具有某些特定性质的函数的集合，而函数空间的定义依赖于这些函数之间的“距离”或者“大小”如何测量。而在L^p 空间中，这种“大小”会通过p次幂的积分来定义。

到了应用的领域，许多物理和工程中的偏微分方程需要使用L^p 空间来描述解的存在性和唯一性问题，以及某些经典的解理论依赖于L^p 空间的性质。反正很重要就对了！

这篇文章我会把L_p 空间的基础、基本性质等概念给过一遍。建议读者预先阅读实分析专栏的第一篇内容，对实分析及泛函分析中的基础概念有基本的认识和理解再阅读本文。

2 关于范数的一些东西

2.1 距离

所谓“距离”是定义在任意两个点之间的一种测量“远近”的概念，例如我们从小就认识的欧几里德距离，定义上只要满足非负性、对称性、三角不等式和自反性即可为距离。

来个典例——闵氏距离，或闵可夫斯基距离的定义。在n 维欧氏空间中的两个点 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 和$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$，考虑任意的实数$p \geq 1$，它们的闵氏距离定义为

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}$$

闵氏距离在几何上提供了不同形状的等距线。取决于p 不同的取值，等距线呈现出不同的几何形状，例如在二维空间中会呈现的，是我们熟知的

1. 当$p = 1$ 时，距离等距线是一个菱形（曼哈顿几何）。
2. 当$p = 2$ 时，等距线是一个圆（欧几里得几何）。
3. 当$p = \infty$ 时，等距线是一个正方形（切比雪夫几何）。

2.2 p-范数

进一步地，我们了解了**范数**的概念，我们知道了范数应该具有正定性、齐次性，满足三角不等式。有时候为了方便初学者理解，会不严谨地将范数形容成更贴近我们生活习惯用语的距离的概念，但这在正式的理论学习中是不应该被混淆的。

在**赋范向量空间**中，我们一般将距离度量定义为其分量的p 次幂之和求p 次方根来计算，所以称之为p-范数。例如当$p=1$ 时，我们称之为曼哈顿范数（L1，$\|\mathbf{x}\|_1=\sum_{i=1}^n |x_i|$）；当$p=2$ 时，就是我们常说的欧几里德范数（L2，$\|\mathbf{x}\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$）。

当空间维度有限或可数无限时，考虑在$\mathbb{R}^n$ 中的向量$\mathbf{x}$，非负实数p，我们将其p-范数定义为

$$\|\mathbf{x}\|_p=\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

但是在更一般的函数空间或高维空间中，，我们没法用上面对于有限维或可数维度空间的方法来定义范数。所以这样的情况下，p-范数的定义由勒贝格积分给出。

给定测度空间$(X,\mathcal{M},\mu)$ 和广义实值函数$f:X\to\overline{\mathbb{R}}$，$f$ 是X 上的可测函数，有$p\in[0,\infty]$，则称$\|f\|_p\in[0,\infty]$ 为f 的p-范数。当p 有限时，定义为

$$\|f\|_p=\left(\int_X |f|^p \ \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

当$p=\infty$ 时，我们称之为一致范数，定义：

$$\|f\|_\infty=\inf\{M\in\mathbb{R}_{\geq 0}:|f|\leq M\}$$

一般来说，当$\mu(X)>0$ 时，我们会称$\|f\|_\infty$ 为f 的本质上确界（Essential infimum），意思就是测度意义下的上确界：忽略掉测度为零的集合后，函数在剩余集合上的上确界。

需要提醒的是，尽管我们经常说p-范数，但是当$p<1$ 时，p-范数就不是*符合定义的范数*。当$p=0$ 时，范数的齐次性不被满足，因为$\|kx\|_0\neq|k|\cdot\|x\|_0$ 未必成立。而当$0<p<1$ 时，范数的三角不等式不被满足。考虑两个非零向量$x=1$ 和$y=-1$，我们有：

$$\|x+y\|_p=(|1|^p+|1^p|)^{\frac{1}{p}}=2^{\frac{1}{p}}\|x\|_p+\|y\|_p=1+1=2$$

显然，这种情况时，$2^{1/p}>2$，因此三角不等式不被满足。

而特殊地，如果p 取了0，通常情况下，它被定义为一个向量中非零元素的个数

$$||\mathbf{v}||_0=\#\{i|x_i\neq 0\}$$

3 L^p 空间及其性质

3.1 L^p 空间

L^p 空间是特殊的赋范线性空间，由在某一域上的所有满足p-范数有限的函数所组成的集合。L^p 空间是定义在勒贝格测度上的可测函数的集合，因此，有时候L^p 空间也被称为勒贝格空间。L^p 空间也是一种典型的巴拿赫空间，特别地，当$p=2$ 时，它还是傅里叶分析中常用的希尔伯特空间$L^2(S^1)$。

定义上来说，L^p 空间有分实复两种，为了方便定义，此处定义域$\mathbb{K}$ 为$\mathbb{R}$ 或$\mathbb{C}$。给定测度空间$(X,\mathcal{M},\mu)$，对于$1 \leq p < \infty$，L^p 空间定义如下:

$$L^p(X,\mu) = \left\{ f : X \to \mathbb{K} \;\middle|\; f \text{ measurable}, \; \|f\|_p < \infty \right\}$$

* L^p 在本文将被用来统称满足此定义的一类空间

L^p 空间是一个向量空间，通常通过函数之间的加法和标量与函数的乘法来定义。$\forall f,g \in L^p(X)$，$\lambda \in \mathbb{K}$，有：+ $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ + $\lambda f(x) = (\lambda f)(x)$

在关于勒贝格测度的实践中，我们经常使用的是$L^p(\mathbb{R}^n, m)$，这也是在实分析中重要最典型最常见的例子。而有时我们还会把空间限制在某个区间，形如$L^p([a,b])$。

3.2 相关的不等式

3.2.1 Hölder 不等式

回顾柯西-施瓦茨不等式，对于实数或复数（即$\mathbb{K}$）的内积空间V 中的两个向量$\mathbf{v}$ 和$\mathbf{u}$，有

$$\|\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle\| \leq \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{u}\|$$

Hölder 不等式是我们常用的柯西-施瓦茨不等式的推广。考虑测度空间(X,μ)，实数$p,q \leq 1$，函数$f,g \in L^p(X)$，满足$\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ ，Hölder 不等式为

$$\int_X |f(x)g(x)| \mathrm{d}\mu \leq \left(\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_X |g|^p \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

容易发现，当我们将柯西-施瓦茨不等式应用于L^2 空间中的函数时，即取$p=q=2$，Holder不等式退化为柯西-施瓦茨不等式。

Proof.

Lemma 3.1 (杨氏不等式)**.** 考虑正实数a,b,p,q，且$\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$，则有$ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$。等号成立当且仅当$a^p = b^q$

考虑测度空间(X,μ)，函数$f \in L^p(X), g \in L^q(X)$，其中$\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$，$\|f\|_p, \|g\|_q$ 均不为0，应用杨氏不等式我们有

$$
\begin{aligned}
&\int_X |f(x)g(x)|\mathrm{d}\mu \le \left(\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_X |g|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} \\
\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q} &\int_X |f(x)g(x)|\mathrm{d}\mu \le 1
\end{aligned}
$$

于是我们有

$$
\begin{aligned}
\frac{|f|}{\|f\|_p} \cdot \frac{|g|}{\|g\|_q} &\le \frac{1}{p}\left(\frac{|f|}{\|f\|_p}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{|g|}{\|g\|_q}\right)^q \\
\int_X \frac{|f|}{\|f\|_p} \cdot \frac{|g|}{\|g\|_q} \,\mathrm{d}\mu &\le \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \\
\int_X |fg| &\le \left(\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_X |g|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

证毕。

■

取等条件

Hölder 不等式取等的条件有两个情况:

1. $p = \infty$ 或$q = \infty$ 时，f 和g 存在几乎处处相同的支集
2. $p > 1, q < \infty$ 时，存在一个常数$\lambda \ge 0$，使得几乎处处有

$$|f|^p = \lambda |g|^q$$

3.2.2 Minkowski 不等式

Minkowski 不等式有几个等价形式。

先说范数形式，考虑有限正实数$1 < p < \infty$，函数$f \in L^p(X), g \in L^q(X)$，则有

$$\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$$

而当$p < 1$ 时，我们知道三角不等式并不成立，所以我们会考虑两个正测度集$A, B \subset X$ ，其中$A \cap B = \emptyset$，并且使得f, g 是示性函数，则有$\|f + g\| \ge \|f\|_p + \|g\|_p$。

不难发现，当$p = 2$ 时，也就是在内积的形式下，Minkowski 不等式退化为欧几里得空间中的三角不等式。

然后是积分形式。考虑实数$p > 1$，f, g 在$[a, b]$ 上可积，则有

$$\left(\int_a^b (|f+g|)^p\right)^{\dfrac{1}{p}} \le \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\dfrac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g|^p\right)^{\dfrac{1}{p}}$$

同样当$0 \le p \le 1$ 时，另外f, g 非负，则上式的不等号相反。

亦或者写成离散的形式

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Proof. 一种最常见的Minkowski 不等式证明方法会用到Hölder 不等式，若$f+g=0$，或者$p=1$，$p=\infty$，则不等式的成立是显然的，否则，我们要先做一些简单的展开

$$\begin{aligned}
(\|f+g\|_p)^p &= \sum_{k=1}^{n}|f_k+g_k|^p \\
&= \sum_{k=1}^{n}|f_k+g_k|\cdot|f_k+g_k|^{p-1} \\
&\leq \sum_{k=1}^{n}(|f_k|+|g_k|)\cdot(|f_k+g_k|)^{p-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n}|f_k|\,|f_k+g_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{n}|g_k|\,|f_k+g_k|^{p-1} \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^{n}|f_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\left(|f_k+g_k|^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\quad + \left(\sum_{k=1}^{n}|g_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\left(|f_k+g_k|^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&= (\|f\|_p+\|g\|_p)\cdot(\|f+g\|_p)^{p-1}
\end{aligned}$$

公式一大坨的很不雅观，反正只要简单地约掉公因式

$$\begin{aligned}
&\|f+g\|_p^p \leq (\|f\|_p+\|g\|_p)\cdot(\|f+g\|_p)^{p-1} \\
&\|f+g\|_p \leq \|f\|_p+\|g\|_p
\end{aligned}$$

证毕。

∎

3.3 基本性质

1. L^p 空间是线性空间。由不等式$|f+g|^p \leq 2^{p-1}(|f|^p+|g|^p)$ 可知，对于函数$f,g\in L^p$，对于任意的实数a,b，$af+bg$ 也在L^p 内。
2. 当$1\leq p<\infty$ 时，$L^p(X)$ 是可分的
3. 当$1\leq p<\infty$ 时，对于拓扑空间X 和其上的Radon 测度μ，$L^p(X)$ ，这些集合是稠密的：
   (a) 简单可积函数是取有限多个值的函数，每个函数值对应于一个测度有限的可测集
   (b) 有界的p 次可积函数，它们在整个定义域上有界并属于L^p，构成了L^p 中的一个稠密子集
   (c) 有紧支撑集的连续函数集合

3.4 嵌入性质

对于$1 \le p < q < \infty$，L^q 空间是L^p 空间的一个嵌入，即$L^q \subset L^p$。

这个嵌入关系是**连续**的。考虑一个$\{f_n\} \in L^q$ 收敛于L^q 的范数，并且在L^p 范数下收敛到g。从$\{f_n\} \in L^q$ 中提取一个几乎处处收敛于f 的子序列，它在L^p 范数下仍然收敛于g，从这个子序列中再提取一个子序列，使其也在几乎处处收敛于g。由于极限的一致性，$f = g$ 几乎处处成立。再注意到L^q 和L^p d都是巴拿赫空间，可知这个嵌入映射是连续的。

Lemma 3.2 (闭图像定理)**.** 考虑巴拿赫空间X, Y 和线性算子$T : X \to Y$，定义T 的图像为

$$\Gamma_T = \{(x, T(x)) \in X \times Y | x \in X\}$$

它在$X \times Y$ 中是闭算子，若它的定义域是闭集，则它是连续的。

3.5 对偶空间

给定一个L^p 空间，我们可以定义其对偶空间$L^p(\Omega)^*$。对偶空间由所有的连续线性泛函组成，这些泛函作用在L^p 上。

当$1 \le p \le \infty$ 时，考虑p 满足$\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ 的q（即共轭指数），L^p 空间的对偶空间，由L^q 给出。

当$1 < p < \infty$ 或者$p = 1$ 且X 是σ-有限测度空间时，L^p 的对偶空间$(L^p)^*$ 等距同构于L^q 。即给定L^p 中的一个有界线性泛函

$$\phi(f) = \int_X f(x) g(x) \mathrm{d}\mu(x)$$

它可以唯一地表示为$g \in L^p$ 并保持范数

$$\|\phi\|_(L^p)^* = \|g\|_q$$

而当$p = 1$ 时，根据Riesz 表示定理，L^1 的对偶空间与L^∞ 同构。

我觉得更重要的是$p = \infty$ 时的情况，我们已知$L^\infty = (L^1)^*$，并且在弱*拓扑$\sigma(L^\infty, L^1)$ 中，闭单位球是紧的。

3.6 完备性（Riesz/Fischer 定理）

Riesz/Fischer 定理，简单的说就是，当$1 \le p < \infty$ 时，L^p 是完备空间。

Proof. 考虑$1 \le p < \infty$，一个柯西列$f_n \in L^p$，我们可以选择其子序列使得

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_L^p \le \frac{1}{2^k}$$

然后我们证明$\{f_{n_k}\}$ 在L^p 收敛。定义$g_k = f_{n_{k+1}} - f_{n_k}$，于是我们有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|g_k\|_{L^p}<\infty,$$

于是$f_{n_1}+\sum_{k=1}^{\infty}g_k$ 在L^p 中逐点几乎处处收敛到函数$f\in L^p$，因此这个子序列的极限存在

$$\lim_{k\to\infty}f_{n_k}=\lim_{k\to\infty}\left(f_{n_1}+\sum_{i=1}^{k-1}g_i\right)=f_{n_1}+\sum_{k=1}^{\infty}g_k=f$$

每一个柯西序列都会收敛，由此，$1\leq p<\infty$ 时$L^p(X)$ 是完备的得证。

再证$p=\infty$ 的情况。如果$\{f_n\}$ 在L^∞ 中是柯西列，那么对于每个$m\in\mathbb{N}$，存在一个$n\in\mathbb{N}$，使得$\forall k,j\geq n$

$$|f_k-f_j|<\frac{1}{m}$$

我们定义一个几乎处处唯一的可测函数$f:X\to\mathbb{R}$，满足

$$f=\lim_{n\to\infty}f_j,\quad x\in N^c$$

$j\to\infty$ 时，对于每个$m\in\mathbb{N}$，存在$n\in\mathbb{N}$，使得$\forall k\geq n$

$$|f_k-f|\leq\frac{1}{m}$$

所以f 本质上有界，且当$k\to\infty$ 时，$f_k\to f$ 在L^∞ 中。

证毕。 ■