[数学分析] 泛函分析不泛寒 I

线性泛函分析的基本概念

O. Anqiao

泛函分析概论

泛函分析是一个主要研究函数空间和函数的变换的数学分支，我们会更关注赋范线性空间（包括巴拿赫空间和希尔伯特空间）及其线性算子的性质。

泛函分析是现代数学研究中许多领域的桥梁和基础，我们建立起对线性空间、内积空间、范数空间等数学结构的抽象理论框架，可以进一步应用到偏微分方程、几何分析等领域。开始写这篇文章的不久前，我花了一些时间阅读柯尔莫戈洛夫的《函数论与泛函分析初步》，除了以理论知识为主的章节，后续的章节中也有讲将相关的数学分析技巧应用于实际数学问题的方法（涉及测度论、勒贝格积分、Hilbert 空间、傅里叶变换、巴拿赫代数等等的换多方面的泛函分析方法）书中的解释非常清晰全面，我会向被泛函分析困扰的小伙伴们推荐它。

在写文章的期间我也有阅读 Haim Brezis 的 *Analyse Fonctionnelle, Théorie Et Applications*，以我阅读的部分内容来看，这份教材的内容会稍微抽象，可能不适合作为入门教材，但对于已有一定基础的读者来说是很适合进阶学习。

另一点，泛函分析常常涉及到高度抽象的概念和推理方法，学习和应用泛函分析有利于提升抽象思维、逻辑推理和问题解决能力。这不是很酷吗?

我在2024年的年初已经发过一篇实分析的文章，其中第一章已经涵盖了本文需要的有关度量空间部分的基础，以及泛函分析学习所需要的一些基础我在过去的文章都有写过。为了避免文章内容重复过多，本文的内容假设读者已掌握微积分、线性代数和一般拓扑学的基础知识。我会着重介绍泛函分析中的基础知识，覆盖一些常见的概念，分享一些个人的理解。

没事，不怕！作为并不长的泛函分析第一篇，肯定还是很 Beginner-friendly 的！

拓扑线性空间

一个线性空间被赋予一个拓扑，使得加法运算和数乘运算作为映射从积空间到原空间是连续的，则称该线性空间为拓扑线性空间。最典型的就是所有的赋范线性空间都是拓扑线性空间（我们可以以范数诱导出这个拓扑），但也有非赋范空间是拓扑线性空间的研究对象，例如无限维的 Montel 空间。

赋范线性空间

线性空间，也叫向量空间，是一组满足一定条件的向量集合（我这几个月开始更习惯“线性空间”，习惯就好）。

线性空间 V 是在一个域 F（通常为实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$ 等）上的非空集合，对于其中任意两个向量 u, v 以及任意标量 α, β，满足：

- 加法封闭性：$\forall u, v \in, u+v \in V$
- 加法结合性和交换性：$\forall u, v, w \in V, (u+v)+w = u+(v+w)$，$\forall u, v \in V, u+v = v+u$
- 数乘封闭性：$\forall u \in V, \alpha u \in V$
- $\exists 0 \in V, \forall u \in V$， $u+0=u$，零向量与任何向量相加不改变其值。
- $\forall u \in V, \exists -u \in V$，使得 $u+(-u)=0$，每个向量在线性空间中有唯一一个反向量与对应的向量相加等于零向量。

人们为线性空间中的向量赋予了一个长度的概念，名为范数（Norm）。考虑赋范线性空间 K 和其上的线性空间 X，则其范数是一个映射：

$$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

并满足以下性质：

- 非负性：范数的值为非负实数
- 齐次性：对于向量 $\mathbf{v}$ 和任意实数 α， 满足 $\|\alpha x\| \leq |\alpha| \cdot \|x\|$
- 三角不等式：范数满足 $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

线性空间的维度是它最大线性无关的向量组的个数。不同于线性代数的是，在数学分析中我们会更关注无限维的线性空间，这是因为无限维空间中有我们所关注的函数序列和函数空间，这是泛函分析的最基本的意义（稍后我们引入“泛函”的定义时，这就是很显然的了）。

子空间

> 线性子空间无歧义时可称子空间，本文没有特别强调的情况下，子空间默认为线性子空间

线性子空间是更大的线性空间的一个线性子集，满足自身的封闭性和线性结构。定义上，考虑一个线性空间 V，对于其子集 $W \subseteq V$， 若 W 中的任意向量 u, v 和任意标量 α, β 满足 $\alpha u + \beta v$ 仍然在

W 中，则称 W 是 V 的线性子空间。显然，一个线性空间是它自身的线性子空间，而不等同于其自身的线性子空间叫做真子空间。

子空间三条很重要的性质：

1. 线性子空间包含封闭与向量加法和数乘的零向量（证明时要多注意，真子空间也要有这样的性质 笔者刚学泛函没两天的时候已经漏好几次了 XD）。
2. 任意多个向量子空间的交集仍然是向量子空间。
3. 一个内积空间的子空间的正交补也是子空间

考虑一个线性空间 V 和 V 上的线性变换 T，对于 V 的子空间 W，若对于任何的 $\xi \in W$ 都有 $T(\xi) \in W$，则称 W 是 V 关于 T 的**不变子空间**。

一个特征值对应的特征向量和零向量构成的一个子空间，称为这个特征值的**特征子空间**。考虑线性空间 V，A 是线性算子（定义之后给出，暂且理解为将其映射回自身或另一个线性空间的线性映射），λ 是 A 的一个特征值，那么对应于特征值 λ 的特征子空间 E_λ 定义为：

$$E_\lambda = \{v \in V \mid Av = \lambda v\}$$

同时，E_λ 是关于 A 的不变子空间。特征子空间 E_λ 的维度被称为特征值 λ 的**几何重数**。

商空间

商空间是通过将一个线性空间按其子空间进行分解所得到的结构。考虑一个线性空间 V，对于其子空间 W，在 V 上定义一个等价运算 $\sim$，使得若 $x - y \in W$ 则 $x \sim y$，意义上这个运算划分了 V 上的向量。每个等价类表示为：

$$[v] = \{u \in V | u \sim v\}$$

则商空间 V/W 定义为 V 中在 $\sim$ 下所有等价类的集合。

容易发现，我们可以很轻松地用 $u, v \in V$ 作为代表元和标量 α 的线性扩展来定义商空间中的加法和数乘，无非就是

- 加法：$[u] + [v] = [u + v]$
- 数乘：$\alpha[u] = [\alpha u]$

商空间拥有我们如此定义的加法和数乘，因此商空间是线性空间。

特殊地，如果 V 是一个有限维的空间，则它可以被分解成它的子空间 W 和商空间 V/W 的直和 $V = W \oplus V/W$。并且其商空间 V/W 的维度为 $\dim(V) - \dim(W)$。

希尔伯特空间概述

希尔伯特空间，即完备的内积空间。这个概念使我们可以不失空间完备性的情况下，将有限维欧氏空间推广到更一般的情况，使之不限于实数和有限维。

在希尔伯特空间上定义了一个内积运算 $\langle\cdot,\cdot\rangle$，满足线性性质、共轭对称性即正定性。由该内积诱导的范数使其成为完备度量空间，并且在范数诱导的拓扑下是闭集的子空间我们称之为希尔伯特空间的闭子空间。

我们可以把直角坐标系中基的概念推广到希尔伯特空间的正交基。在希尔伯特空间中，我们可以使用基 $\{e_n\}$ 的元素进行无限求和的线性组合来表示任意向量，这些系数可以是无限个，并且由于希尔伯特空间的完备性，它在空间的范数下是收敛的。

巴拿赫空间概述

巴拿赫空间的定义很简单，就是完备的赋范线性空间，这意味着其中的柯西列都是收敛的。

例如，欧氏空间就是典型的巴拿赫空间，其范数为欧几里德范数（L2） $\|\mathbf{v}\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ 。或者在泛函分析中我们常说的希尔伯特空间，也就是能从巴拿赫空间中的范数诱导满足平行四边形法则的内积的，一个完备的内积空间。我们在实分析中学到的，由勒贝格可积函数组成的 L^p 空间、复分析中常见的哈代类。我们都能轻易由它们的范数诱导出其拓扑。

贝尔纲定理

在淑芬中，我们经常用贝尔纲定理来证明在一个完备度量空间上的连续函数空间中，连续函数的集合的稠密性。先回顾一下拓扑学中“无处稠密”的概念（这个我在Cantor集的文章提过），考虑拓扑空间 X，若其子集 E 的闭包的内部 $\overline{E}^{\circ}=\emptyset$，也就是它没有内点，则称 E 在 X 中无处稠密。

如果拓扑空间的某个子空间是可数个无处稠密集的并集，我们称之为**第一纲集**，除此之外的则被称为**第二纲集**。贝尔纲定理的内容是：完备的度量空间是第二纲集，其中可数个稠密开集的交是稠密的第二纲集，第一纲集的补集是稠密的第二纲集。

来个浅显的例子。根据定理，$\mathbb{R}$ 是完备度量空间，即第二纲集，我们希望证明它不可数。我们用反证法，如果它可数，则可以表示成 $\mathbb{R}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x_n\}$，而这个单点集 $\{x_n\}$ 显然是第一纲集（因为单点集是稠密的开集的并集），这显然与贝尔纲定理矛盾。

线性泛函

定义

泛函（functional）是从一个空间映射到实数域或复数域的映射。而线性泛函，指的是定义在线性空间上的，对应标量域的满足线性性质的泛函。考虑线性空间 V 上的泛函 f，若它具有可加性和齐次性（该性质扩展到复数则叫共轭齐次），则它是一个线性泛函，具体地，满足可加性和共轭齐次性的泛函也称为**共轭线性泛函**。

强调一下，线性泛函是在线性代数和线性泛函分析中这会是我们默认的条件，但是显然函数空间不一定是线性空间，例如一个从无限维流形到数域的映射也是泛函。

在函数空间中，我们说空间本身就是由函数构成的，在这一的情况下泛函可以被视为“函数的函数”（注意与复合函数的区分），也因此有一些较早的作者会如此定义。但是在现代数学中这说法显然是过于狭隘的，随便举个例子，在 $\mathbb{R}^n$ 中定义一个泛函 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$，$f(x,y)=x^2+y^2$ 就显然不是什么“函数的函数”。

我们将全部从 V 对应 c 的线性泛函的集合记为 $\mathrm{Hom}(V,c)$，它本身也是线性空间，特殊地被称为代数对偶空间。在一个拓扑线性空间中，所有连续线性泛函的集合被称为**连续对偶空间**。有时我们也能通过维度来判断，在有限维空间中，线性泛函都是连续的，但是在无限维空间中连续对偶空间是代数对偶空间的真子空间。

给一些有代表性的例子——积分。考虑在 $C[a,b]$ 的向量空间映射到实数域的线性泛函，是由黎曼积分所定义的线性变换

$$L(f)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

其线性性质由定积分的基本性质推导是显然的。

核

线性泛函 L 的核定义为所有使得 $L(v)=0$ 的向量 v 的集合，记作 $\ker(L)$，我们也说核是一个线性泛函的零空间（同样的它也是其子空间）。对于非零线性泛函，其核中的元素是线性无关的。

凸性与凸泛函

在泛函分析中，研究的对象通常是函数空间中的集合和函数，其中许多定理和性质都依赖于集合的凸性，为了方便后面的研究，我们会先了解这个性质及其相关概念。

先说凸集。如果一个集合是凸的，那么连接集合中任意两个点的线段完全包含在该集合内。考虑一个集合 $C \subseteq \mathbb{R}^n$，若对于任意的 $u, v \in C$ 和任意的 $\lambda \in [a, b]$，都有 $\lambda u + (1-\lambda)v \in C$，则我们称 C 是一个凸集。

我们可以回味一下，学微积分时有了解到的一元函数的凸性。考虑定义在区间 I 上的函数 f，考虑 $x_1, x_2 \in I$ 和 $\lambda \in [0, 1]$ 如果下式成立

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

则 f 是 I 上的凸函数，而若上式的 $\leq$ 改为 $\geq$，则我们称之为在 I 上的凹函数。

现在我们考虑的是将这个概念推广到泛函。其实定义上看还是很简单的，考虑定义在空间 V 上的泛函 f，考虑 $u, v \in V$ 和 $\lambda \in [0, 1]$ 如果下式成立

$$f(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda f(u) + (1-\lambda)f(v)$$

则 f 是 V 上的凸泛函。特殊地，若对于 $x \in V$ 和 $\alpha > 0$，凸泛函满足

$$\alpha f(x) = f(\alpha x)$$

则我们称之为正齐次凸泛函。显然，线性泛函都是具有正齐次凸性质的。另外，我们会称满足次可加性和正齐次性的泛函为**次线性泛函**，它同样是凸性的。

Minkowski 泛函

考虑一个线性空间 V，并且 C 是 V 中的一个非空，包含原点的凸集，$\forall x \in C$，我们称 V 关于 C 的 Minkowski 泛函定义为

$$f_C = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda C\}$$

在局部凸空间中，每一个凸平衡集（即同时满足凸性和对称性的集合）的 Minkowski 泛函都是一个半范数，由这些半范数诱导的拓扑可以定义一个局部凸拓扑。

考虑一个线性空间 V，与其子集 $C \subseteq V$，如果对于每个 $x \in V$，存在正数 $\lambda > 0$ 使得 x 满足 $x \in \lambda C$，则我们称 C 是**吸收集**。从 Minkowski 泛函的定义我们易知，它的存在即反映了 C 的吸收性。

线性泛函延拓定理

线性泛函延拓定理，又称Hahn-Banach 定理，反正听名字你也知道是干嘛的了。一般对此定理，我们需要分实复域来讨论。

先从实数域的说起。考虑实线性空间 V 与其线性子空间 W，其中 p 是 V 上的次线性泛函，且 W 上存在一个线性泛函 f 满足 $\forall u \in W$，都有 $f(u) \leq p(u)$，那么存在一个线性泛函 $\tilde{f}$ 满足

1. $\tilde{f}(u) = f(u)$
2. $\tilde{f}(u) \leq p(u)$

这允许了我们将定义在一个子空间上的线性泛函延拓到整个空间。这个定理推广到复数域的方法很简单，只要多考虑到实部和虚部即可。考虑复线性空间 V 与其线性子空间 W，其中 p 是 V 上的次线性泛函，且 W 上存在一个线性泛函 f 满足 $\forall u \in W$，都有 $|f(u)| \leq p(u)$，那么存在一个线性泛函 $\tilde{f}$ 满足

1. $\tilde{f}(u) = f(u)$
2. $|\tilde{f}(u)| \leq p(u)$

一个子空间的线性泛函的延拓不是唯一的。

在赋范空间中，线性泛函延拓定理可以用来推广另一个定理，即每个连续线性泛函都可以延拓到整个空间，并且其范数保持不变，叫做**保范延拓定理**。考虑一个赋范空间 V，W 是 V 的一个线性子空间。若 $f: W \to \mathbb{R}$ 是一个连续线性泛函，则存在一个连续线性泛函 $F: V \to \mathbb{R}$，使得 F 在 W 上与 f 一致，并且 $\|F\| = \|f\|$。

弱拓扑与弱收敛

考虑赋范线性空间 V，其上的对偶空间表示为 V^*。弱拓扑是指在 V 上引入的最弱的拓扑 $\sigma(V, V^*)$，使得每个线性泛函 $f \in V^*$ 都连续。具有这个弱拓扑的对偶空间 V^* 是一个局部凸空间，我们可以由此诱导半范数 $p_x(f) = |f(x)|$。

考虑 V 中的一个序列 $\{x_n\}$ 和 V^* 中的一个元素 $f \in V^*$，如果对于所有 $f \in V^*$，都有

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) \to f(x)$$

则 $\{x_n\}$ 在 V 中弱收敛于 x，我们记作 $x_n \rightharpoonup x$，并且称 f 是 $\{x_n\}$ 的弱极限，弱收敛若存在则必唯一。注意到范数的弱下半连续性，此时有：

$$\|x\| \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$$

这边插入强收敛的概念，若 $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0$，则我们称 $\{x_0\}$ 强收敛于 x。强收敛显然是也有弱收敛的性质。

邻域基

对于点 $x \in V$ 和任意有限个线性泛函 $\{f_n\} \in V^*$ 和任意的 $\epsilon > 0$，我们可以定义该弱拓扑下， x 的邻域

$$U(x,\epsilon) = \{y \in V \mid |f_i(y-x)| < \epsilon, i = 1,2,\ldots,n\}$$

所有这样的基本邻域的集合构成了 x 在弱拓扑下的邻域基。

连续线性算子

(P2待更)

Ouyang Anqiao 01:04 02/07/2024

gzanqiao@hotmail.com