[数学分析] 友好的 复分析导读 I-II

引言

许久不见，漫长又转瞬即逝的一个月，大家又变强了多少呢？

在无趣的应试和各种烦人事中，我决定用空闲时间换个心情写复分析了。

复分析（Complex Analysis）是数学分析的分支，主要研究复数函数的性质，例如解析性、积分、级数等，以及它们在物理、工程、计算机科学等领域中的应用。本文内容的顺序会贴合一般复分析学习的大纲，偶尔掺杂点个人的浅见和理解。

> **这不是笔记，干不干货不好说，也不是为了 某些 想速成而应试的笨蛋写的。** 我并不想严格将内容限于，那种无异于教材注解的刻板的主线，所以请允许我偶尔放飞自我地联系其他数学分支甚至学科的内容。

本文的内容难度以读者了解直到初中阶段学习的数学概念为标准。

复数

虚数和复数

初中生记忆中最接近复数的知识点和一元二次方程有关，每次特别强调"方程没有**实数**根"的时候就总想画蛇添足，但我忍住了。一个一元二次方程形如：

$$ar^2 + br + c = 0$$

以前老师都教过"一元二次方程根的判别式"，表示为 $\Delta = b^2 - 4ac$，然后会分成以下三种情况讨论：

- 若 $\Delta > 0$ 则方程有两个实数根 $r = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
- 若 $\Delta = 0$ 则方程有一个实数根 $r = \frac{-b}{2a}$
- 若 $\Delta < 0$ 则方程无实数根

最后一种情况，既然是"无实数根"这样强调，那就说明还有点什么，刚学这个的时候老师还微笑着随口一问"那你们知道实数之外的是什么吗？"，可惜初二的时候我的数学知识范畴仅限于应试，只知道按"实"的对立面蒙"虚数"。装x心有余而力不足

我们知道在实数的范畴考虑，负数没法开根号，所以为了完善数系，人们多发明了个 $\sqrt{-1} = \pm i$，就是所谓“虚数”，但是很不实际，就好比那个根的判别式，在几何意义上 $\Delta < 0$ 时就不应该有解。所以我们也一般在印象里将其抽象地当着一个“介于实际存在和不存在之间的、虚幻的数”。有了 i，$\Delta < 0$ 的情况下，方程的解就可以形如：

$$r_1 = \alpha + i\beta$$
$$r_2 = \alpha - i\beta$$

此时方程的解是复数且它们是共轭的（稍后解释）。

一个复数形如：

$$z = a + bi$$

这里的 a, b 都是实数，而 a 被称为复数的实部，b 被称为复数的虚部。在这样的定义下，有时我们也会将实部表示为 $\Re(z)$ 或 $\mathrm{Re}(z)$，虚部表示为 $\Im(z)$ 或 $\mathrm{Im}(z)$，于是：

$$z = \Re(z) + i\Im(z)$$

我们可以将实数理解为虚部为零的复数，也因此复数集 $\mathbb{C}$ 是包含 $\mathbb{R}$ 的。

复数的运算

在与原本的实数域兼容的情况下，我们定义复数的运算，考虑复数 $z_1 = a_1 + b_1 i$ 和 $z_2 = a_2 + b_2 i$:

- $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$
- $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$

并且复数满足加法/乘法结合率和交换律、乘法分配率；复数的加法和乘法具有单位元和其逆元。

与实数不同的是，复数之间定义不了全序关系。如果要使得复数满足全序关系要求，则对于任意 $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ 都要满足：

- 若 $z_1 \le z_2$，则 $z_1 + z_3 \le z_2 + z_3$ （1）
- 若 $z_1 \le z_2$ 且 $z_3 > 0$，则 $z_1 z_3 \le z_2 z_3$ （2）

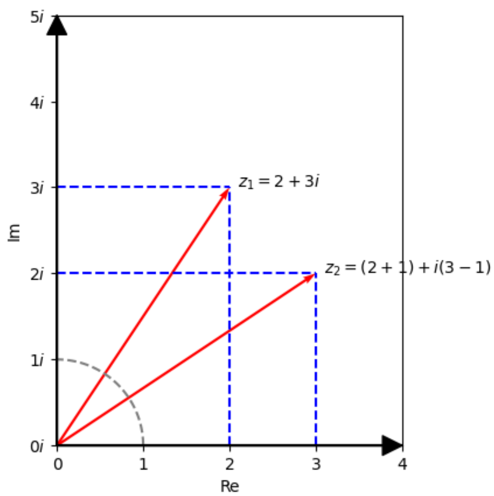
我们以虚数单位 i 为例，要能定义全序关系，则必定在 $i > 0$ 、$i < 0$ 或 $i = 0$ 中有一个成立，已知 $i \neq 0$。

- 若 $i>0$，根据（2），则 $i^2>0$ 必须成立，但是 $-1>0$ 是不成立的。
- 若 $i<0$，则意味着 $-i>0$，根据（2），则 $(-i)^2>0$ 必须成立，但是这等同于 $-1>0$，也是不成立的。

因此我们不能像在实数域一样任意地对复数域中的数比较大小。

复平面

要考虑复数的几何表示和意义，就得建立一个适用的平面。



任何一个复数 $z=a+bi$，都可以用一个有序数对 (a,b) 唯一确定，因此我们可以建立复数集与平面直角坐标系中的点一一对应，这些点组成的集合我们称之为平面点集，或者点集。在此基础上，我们一般将横坐标称为实轴，将纵坐标称为虚轴，显而易见的是，除了原点以外，虚轴的点表示的是虚数。之后我们的 $z(a,b)$ 表达等价于 $z=a+bi$。

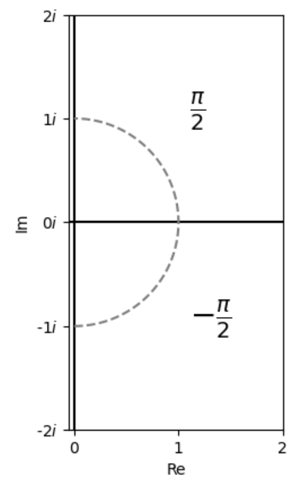
此外，用向量表示复数会很利于我们理解复数运算（如图），复数的加法可以理解成是按照向量的平行四边形法则来进行的。向量 $\mathbf{z}$ 的长度被称为复数 z 的模，定义为：

$$r=|\mathbf{z}|=\sqrt{a^2+b^2}>0$$

对所有的 z,w，有性质：

- $|z|-|w|\leq|z+w|\leq|z|+|w|$
- $|zw|=|z||w|$
- $\left|\frac{z}{w}\right|=\frac{|z|}{|w|}$

以及，我们还能用三角坐标表示复数。若在图像中向量与实轴的夹角记为 $\theta = \arg z$，我们称之为复数 z 的 辐角。如图，有向角的正方向默认为逆时针，图中的 i 的辐角为 $\dfrac{\pi}{2}$ 而 $-i$ 的辐角则相反。



任何非零复数都有无穷多个辐角，这些值之间相差 2π 的整数倍，定义为 $\{\theta + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$，我们经常会约定满足 $-\pi < \theta \le \pi$ 的辐角为 θ 的主值（有时也会被约定为 $0 < \theta \le 2\pi$，主要就是这两种）。由于：

$$\begin{cases} a = r\cos\theta \\ b = r\sin\theta \end{cases}$$

我们可以将复数表示为 $z = a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$，这种我们称之为三角形式或者极坐标形式，其中 $\cos\theta + i\sin\theta$ 有时会被简写为 $\operatorname{cis}\theta$。（但是Latex貌似没有默认的cis公式，这会有点麻烦，我之后可能会避免使用这种记法）

欧拉公式

在数学和物理中有一个非常重要的公式，就是被称为“上帝公式”的欧拉公式：

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

很多书和文档上所说的，欧拉公式的“推导”，例如将两边自然指数和三角函数分别用泰勒级数展开得到结论，严格来说只能算是验证而不是推导。篇幅有限，不能更详略不当了，所以我大概扯一下我关于欧拉公式的一些肤浅的理解就好

> 先前我在网络上看见很多以物理的应用引入这概念的，对于一个物理差的人而言这真头疼。而关于欧拉公式深入的解释和讨论，如果有闲的一天我再专门写。
>
> **以下内容很颠，是在放学路上用手机打的，看不懂直接跳吧**

我们考虑单位圆，即以原点为圆心、半径为1的圆，所以此时我们的这个复数的极坐标形式（与实轴的夹角为 x）就变成了：

$$y = \cos\theta + i\sin\theta$$

注意到，当我们用 i 来与一个复数相乘时，表示在复平面的向量会逆时针旋转90度，这个 $r = i$ 在旋转上的意义会与之相关。欧拉公式带来的结论，是取复数 e^{ix} 在复平面上旋转画出的轨迹正是单位圆上的点。所以我们关心的实质就是一个模为1的复数。

在旋转的过程中，向量的模不变，变的是我们关注的角 x 和随角度变化的向量 y，在此处建立一个函数关系，概念就模糊不清地出现了。此时 y 的实部是 $\cos x$，虚部是 $i\sin x$。y 继续旋转，在极短的时间内旋转所变化的量（导数的概念），此时变化的点表示的复数我们记做 $y'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，则它们的差值相当于 y 逆时针旋转了90度，也就是乘了个 i。（我们可以轻易脑补出原本的 y 和已经旋转了一段距离的 y'，并考虑表示它们的差值的向量 $\overline{y}$，是垂直于 a 的）

于是就有了下面这个微分方程，并且我们可以将 $(0,1)$ 带入（过程略，反正简单推几步就出来了）：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=iy=i(\cos\theta+i\sin\theta)$$

共轭

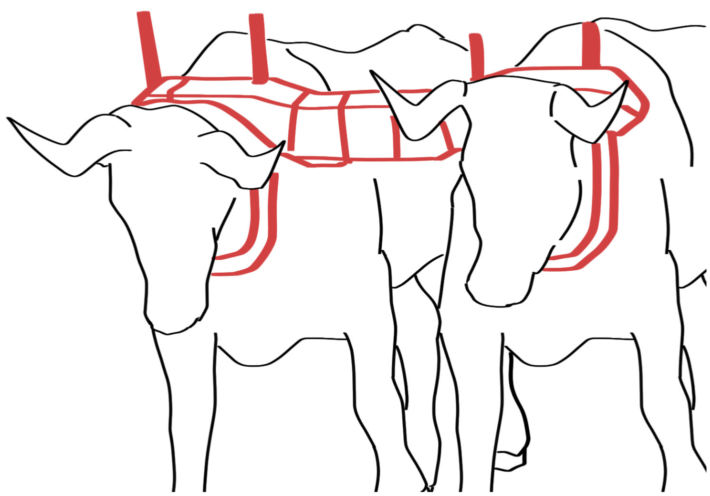
共轭（Conjugate）的『轭』来自古代给牛两两并排拉车的木头，在数学中有“成对”的意思，意义上是“耦合的、一体的”，而在某些特性上会相反。在数学中我们有常见的复共轭、共轭类（ Group Theory 相关的），在化学中也有什么共轭酸碱对，其根本的意思都是这样。

此概念在复数的研究中，是指对复数的虚部变号得到的复数，一对实部相同而虚部相反的复数被称为“共轭复数”。

考虑复数 $z=a+bi$，则 z 的共轭为：

$$\overline{z}=\overline{a+bi}=a-bi$$

不难想象，如果在复平面中以向量来表示，则它们是关于实轴对称的——这也意味着实数的共轭是其自身。、



不喜欢实物图影响整体风格，所以本鼠标PS灵魂画手出动了（我尽力了啊哈哈哈哈）

此处列举一些最基础的，进行简单的推导就可适用于很多情况的性质：

- $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$
- $\overline{z_1\times z_2}=\overline{z_1}\times\overline{z_2}$
- $|z|=|\overline{z}|$
- $n\in\mathbb{Z},\ \overline{z^n}=\overline{z}^n$

黎曼球面

黎曼球面可以被看作是复平面的扩充。我们将复平面上的每个点映射到三维空间中的单位球面上，在这个映射中，复平面上的无穷远点 ∞ 被映射到球面的北极点，得到的球面就被称为黎曼球面（或复球面），就是个更形象的 $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$。紧致化复平面对我们后续的性质研究很重要。

当我们给以复平面原点 O 为球心的黎曼球面建立笛卡尔坐标系，在三维空间中的单位球面上，对于球面上的每个点 (X, Y, Z)，都有 $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$，此时的北极坐标为 $(0, 0, 1)$。强调，相比有两个无穷远点的扩充实数轴 $\overline{\mathbb{R}}$，扩充复平面只有北极一个点是无穷远点。

在我们对数轴和普通复平面的认知下，一个数除以零是没有定义的，但是我们在黎曼球面却可以做到这点。我们在扩充实数轴上不能定义除以零，是因为正无穷和负无穷在数轴的两侧，而我们做不到到将正无穷和负无穷定义为同一个普通点并“收紧”。而在黎曼球面中，从几何上容易想象，在球面的一个点离平面越远，则其投影就越靠近北极，随着点在平面上向无穷远移动，投影也趋近于北极。非零的数除以零可以理解为数无限趋近于无穷远点，因此取极限，任何非零的数除以零都是无穷大的。

代数几何角度

另外可以简单提提黎曼球面在其他数学分支的地位。复射影空间指复数平面加上一个无穷远点形成的拓扑空间。黎曼球面是紧致的一维复射影空间（一维时也称复射影直线），符号表示为 $\mathbb{CP}^1$。*众所周知，当我们形容一个东西是“紧致的”，往往是在强调它是一个好东西，数学也不例外。* 此外，黎曼球面还是一个典型的黎曼曲面，更是一个复一维紧致曲面，具有很多很棒很棒的拓扑性质。

复代数簇可以由一组多项式方程定义，在一维复射影空间的情况下，我们可以考虑使用球面的方程来定义它。球面上的点 (x, y, z) 满足方程 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$，也就是说黎曼球面是一个一维的复代数簇。

在代数几何和射影几何等领域，黎曼球面经常作为各一个典型的、直观的各种概念的例子出现，对我们后续的深入学习很有帮助。

复解析函数 - 概论

解析函数这个概念本身可以再被细分为实解析函数（一般我们会说“无穷可微”而非解析）和复解析函数，它们有很多很重要的性质，后者是我们在复分析领域的（可以说是最重要的）研究对象。

在第一章，我们已经大致了解了作为基础的复数和复平面，现在，我们美好的复分析之旅就从此开始辣！

复函数及其极限

复函数（亦称复变函数，意思是等价的，我随着语感写）是以复数作为自变量和因变量的函数，其值域与定义域都是复平面的子集，先定义：

考虑 $E \subseteq \mathbb{C}$，我们将映射 $f: E \to \mathbb{C}$ 称为 E 上的复变函数，可以将它视为两个二元实函数，写成如下形式：

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

我们经常要将复函数转化为实函数来研究其性质，例如我们可以将函数 $f(z) = z^2 + 1$ 转为一对实函数：

$$z = x + yi$$

$$f(z) = z^2 + 1 = (x^2 + y^2 + 1) + i2xy$$

得到 $u = x^2 + y^2 + 1,\ v = 2xy$。

若 $\forall z \in E$ 都有唯一确定的复数 $w = f(z)$ 与之对应，则我们称 w 是在 E 确定了的单值函数 $w = f(z)(z \in E)$，否则我们就称 w 是在 E 确定了的多值函数 $w = f(z)(z \in E)$。常见的单值函数包括多项式函数、指数函数、三角函数等，而多值函数最常见的可能是幂函数和对数函数。

实变函数的极限定义与简单的一元实变函数的定义很相似。考虑在 E 上定义 $w = f(z)$，对于任何 $\varepsilon > 0$ 都存在 $\delta > 0$ 使得当 $|z - z_0| < \delta$ 时，有 $|f(z) - L| < \varepsilon$，则我们称函数 f 沿 E 有极限 L，记为：

$$\lim_{z \to z_0} f = L$$

前面说到了复变函数可以写为二元实函数的形式，因此我们可以将复变函数的极限问题转化为二元实函数的极限问题。z 趋向于某一复数 $z_0 = x_0 + iy_0$ 当且仅当其实二元函数 $u(x, y),\ v(x, y)$ 均在 (x_0, y_0) 处连续。

复可微与解析函数

若在 E 上的函数 $w = f(z)$ 在点 $z_0 \in E$ 的领域有定义且存在有限的极限：

$$\lim_{\Delta z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

则我们称 $f(z)$ 在 z_0 处可导，这个极限亦被我们称为导数，可以记为：

$$\Delta z = z - z_0$$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

显然，若 $f(z)$ 在 z_0 处可导，则 $f(z)$ 在 z_0 处是连续的。

当一个函数在 z_0 处及其邻域 $B(z_0, \delta)$ 内处处可导，则我们称 $f(z)$ 在 z_0 处解析（但是要注意，我们所说的解析指的是函数在一个区域上的性质，而非某个点）。解析的范围也可以是指一个区间等更大的范围，反正就是指一个在区域上处处可导的函数，若函数在某点解析，则一定在该点可导，反过来未必成立。

将范围扩大到定义域来说，对于复函数 $f(z)$，若在定义域 $E \in \mathbb{C}$ 上的每一点 z_0 及其领域内存在连续的导函数 $f'(z_0)$，则我们称 $f(z)$ 是在 E 上的解析函数（亦称**全纯函数**），这性质意味着该函数在此定义域处处可微。

柯西-黎曼方程

再来说说复分析中最基础也最重要的公式之一——柯西-黎曼方程（Cauchy–Riemann equations, CRE），提供了可微函数在定义域中为解析函数的充要条件。

考虑在定义域 E 上的函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 和复数 $z = x + iy$，柯西方程如下：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

我们说函数 f 在 E 中的点 z 可微当且仅当它在 z 处满足柯西-黎曼方程。而 f 在 E 上解析，也当且仅当它们满足柯西-黎曼方程。

很多时候为了使得在圆周或者环形区域内的边值问题更容易处理，我们还会考虑使用极坐标形式的 CRE 。对于复数 $z = re^{i\theta}$，在极坐标形式 $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$，柯西-黎曼方程亦可以以极坐标形式表示：

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \ \frac{\partial u}{\partial v} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

CRE 还意味着一个显而易见的重点，即可导复函数的实部和虚部不是相互独立的，它们之间有联系。

级数理论

复函数的级数理论算是复分析里最基础也最重要的部分之一，在我们之后研究解析函数、亚纯函数和黎曼曲面等方面会发挥很重要的作用。

复数项级数

复级数的定义和性质与实级数类似，给定一个复数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$，则一个复数项级数的形如：

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + z_3 \ldots + z_n + \ldots$$

复数列的前 n 项的和 S_n 被称作级数的部分和。

类似地，复数项级数也有收敛性和发散性，若部分和数列极限不存在，则我们称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 发散。考虑 $z_n = x_n + iy_n$，$x_n, y_n \in \mathbb{R}$，我们称 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 为实部级数、$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 为虚部级数，若实部级数和虚部级数分别收敛到某个 x 和 y，那么 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛到 $x + iy$。

如果 $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ 收敛，则我们称 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 绝对收敛。

复数项级数满足线性组合的性质，即如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 都收敛，则 $\sum_{n=0}^{\infty} (ka_n + b_n)$ 也收敛，其中 k 是任意复数。

复数项级数的收敛性和性质与实数项级数类似，可以通过收敛性的判别法来确定级数是否收敛（也称之为审敛法），例如比较审敛法、比值审敛法、根值审敛法等。继续之前的定义，此处列举一些最基本的，考虑两个级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$，其中我们要判断收敛性的是 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$。

- **比较审敛法**：$|u_n| \leq v_n$，若 $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ 也收敛。
- **比值审敛法（达朗贝尔判别法）**：设 $\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$，若：
  - $r < 1$，则级数绝对收敛
  - $r > 1$ 或 $r = \infty$，则级数发散
  - $r = 1$ 时级数可能收敛亦可能发散，我们需要用其他方法加以判断。
- **根值审敛法（柯西审敛法）**：设级数根值为 $r = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|}$，若：
  - $r < 1$，则级数绝对收敛

- $r > 1$ 或 $r = \infty$，则级数发散
- $r = 1$ 时级数可能收敛亦可能发散，我们需要用其他方法加以判断。

复函数项级数

同理，复函数项级数也与实函数项级数是类似的。给定复函数列 $\{f(z)\}_{n=1}^{\infty}$，且函数的定义域互不相交，定义它们的交集为 D ，D 是级数的定义域，复函数项级数形如：

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + f_3(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots$$

复函数列的前 n 项的和 S_n 被称作级数的部分和。

对于复函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$，其定义域 D 内的各个点 z，任意的 $\varepsilon > 0$ 都有对应的 N_z 使得当 $n > N_z$ ，考虑任意正整数 p 有：

$$\left| \sum_{i=n+1}^{n+p} f_i(z) \right| < \varepsilon$$

则我们说该复函数项级数是收敛的。此外如果还存在一个自然数 N （与 z 无关的）对于 D 内每个 z 均满足当 $n > N$ 时，任意正整数 p 都有 $\left| \sum_{i=n+1}^{n+p} f_i(z) \right| < \varepsilon$，则这个级数还是一致收敛的。

定义比较乱，意思却很简单，就是说在每个点 z 处，级数的部分和都能足够接近于零，且在整个定义域 D 内都具有相同的性质，即对于所有 z 都足够接近于零。

魏尔施特拉斯判别法

对于函数项级数，有一种思路类似于前面比较审敛法的判断是否收敛的方法叫做 魏尔施特拉斯判别法（Weierstrass M-test / Weierstraßsches Majorantenkriterium，来体验一下德语的魅力），中文有简称 "M 判别法"。

考虑函数序列 $\{f_n(z)\}$ 与其定义域 D，和正常数 M_n 使得：

$$|f_n(z)| \leq M_n$$

对于 $n \geq 1$ 和 D 内所有的 z，若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 D 内一致收敛。

魏尔施特拉斯判别法的核心思想在于，在函数序列 f_n 随着 n 的增大逐渐趋于某个极限函数 $f(z)$ 的同

时，我们要求每个点 x 处的函数序列都被一个相同的上界 M 所控制，即函数序列的绝对值不会超过某个常数，由此判断一致收敛性。

复幂级数

有一种常见的特殊复函数项级数，被称为复幂级数，因为有不同于一般的复函数项级数的收敛性判别方法和更好的性质，所以单独讨论。

考虑复数 z_0, c_n， 复幂级数形如：

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

我们称之为以 z_0 为中心的复幂级数。对于 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$，其收敛半径是指复幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在复平面上收敛的半径范围，如果存在 $R>0$，使得级数在以 z_n 为中心、半径为 R 的圆盘 $|z|<R$ 内绝对收敛，并且在圆周 $|z|=R$ 上发散，则称 R 为该级数的收敛半径。而使复幂级数收敛的域则被称为收敛圆，幂级数在其收敛圆内是解析函数。

特别地，当 $z_0=0$，即以 0 为中心的复幂级数，即：

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

被称为麦克劳林级数。

Ouyang Anqiao 01:36 13/04/2024

复积分

然后为了方便，我们事先约定，本文中的定向曲线在没有特别声明的情况下：

- 都是指光滑或分段光滑，也就是可求长或分段可求长的曲线。
- 对于开口弧线，一般情况下我们指出其起始点和终点即可。
- 对于闭曲线，默认逆时针为正向。特别强调正向时记做 C^+；反之顺时针为逆向，记做 C^-

概念及定义

将复变函数沿着曲线或者曲面进行的积分，我们称之为复积分。之所以如此定义，是因为复变函数不同于实函数在横轴上正反方向各种动，而是在复平面上动的，因此复积分类似于实函数中的曲线积分，定义是基于曲线路径的。

还是一如既往的取样分割。设平面上的曲线 C 起始点为 A，终点为 B，函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 C 上有定义，我们考虑将曲线分成 n 段弧，每段对应的 $z_k=x_k+iy_k$，并且 $\Delta z_k=\Delta x_k+i\Delta y_k=z_k+1-z_k$。我们在每段弧 $\overset{\frown}{zz_{k+1}}$ 任选一点 $\zeta_k=\xi_k+i\eta_k$，就有了和式：

$$S(f,z_0,z_1,...,z_n)=\sum_{k=0}^{n}f(\zeta_k)\cdot\Delta z_k$$

然后考虑使每个取样分割的宽度趋近于0。令 $\sigma=\max_{0\le k\le n}(\Delta z_k)$，当 $\sigma\to 0$ 时，函数 $f(z)$ 沿 C 从 A 到 B 的复积分为：

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\lim_{\sigma\to 0}\sum_{k=0}^{n}f(\zeta_k)\cdot\Delta z_k$$

反过来，$f(z)$ 沿 C 从 B 到 A 的复积分则表示为：

$$\int_{C^-}f(z)\mathrm{d}z$$

我们还会将闭曲线的积分称作环路积分。若 C 是一个闭曲线，则 $f(z)$ 沿 C 的环路积分表示为：

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z$$

应该注意到的是复积分是与曲线路径有关的，因此我们不能单纯像定积分那样用区间来定义。

与实函数的曲线积分类似，复曲线积分的结果通常取决于路径上的函数值以及路径的长度和形状，我们积的无非就是函数与曲线之间的曲面面积，用物理的说法就是求曲线的质量。

我们知道被积函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在曲线 C 上连续，意味着它在 C 上可积。在这样的前提下，如果我们将复变量的实部和虚部分开，可以推导：

$$
\begin{aligned}
S(f, z_0, z_1, ..., z_n) &= \sum_{k=0}^{n} f(\zeta_k) \cdot \Delta z_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} (u_k + iv_k) \cdot (\Delta x_k + i\Delta y_k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (u_k \Delta x_k + u_k i \Delta y_k + iv_k \Delta x_k - v_k \Delta y_k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (u_k \Delta x_k - v\Delta y_k) + i\sum_{k=0}^{n} (v\Delta x_k + u\Delta y_k)
\end{aligned}
$$

由于 $\sigma \to 0$，所以有 $\max_{0 \le k \le n} |\Delta x_k| \to 0$，$\max_{0 \le k \le n} |\Delta y_k| \to 0$，因此我们有：

$$
\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_C u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + i\int_C v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y
$$

很眼熟是吧，实质上就是，我们把这玩意拆成了两个实变中的第二类曲线积分。

基本性质

类似于曲线积分，这里是复积分一些显而易见的性质。

$$
\int_C kf(z)\mathrm{d}z = k\int_C f(z)\mathrm{d}z
$$

$$
\int_C [f(z) \pm g(z)]\mathrm{d}z = \int_C f(z)\mathrm{d}z \pm \int_C g(z)\mathrm{d}z
$$

$$
\int\limits_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int\limits_{C_2} f(z)\mathrm{d}z = \int\limits_{C_1+C_2} f(z)\mathrm{d}z
$$

$$
\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \le \int_C f(z)\mathrm{d}z
$$

此外，积分沿曲线的方向会影响到积分正负：

$$
\int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z = -\int_C f(z)\mathrm{d}z
$$

以及复积分的控制不等式。考虑 C 的弧长 L 和常数 $M > 0$，弧微分 $\mathrm{d}s = \mathrm{d}z|$，若 $|f(z)| \le M$，则

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leq \int_C |f(z)|ds \leq ML$$

拓扑学概念补充

先了解点拓扑学基础知识，以便解释后面的定义。

平面上的闭曲线关于某个点的**卷绕数**，表示了曲线绕过该点的次数。但与曲线方向相关，如果是逆方向绕点，则此处的卷绕数会计负数。当然这也是可通过幅角变化计算的：

$$w = \frac{1}{2\pi}\Delta\theta\arg z$$

考虑拓扑空间 X, Y 和两个连续函数 $f, g : X \to Y$，存在一个连续映射 $H(x,t) : X \times [0,1] \to Y$，其中 $x \in X$，$t \in [0,1]$，对于所有的 x 满足：

- $f(x) = H(x,0)$
- $g(x) = H(x,1)$

此时我们称 f 与 g **同伦**，记作 $f \simeq g$。意义上来说，可以想象两个空间中的连续映射可以连续地进行形变而相互转化，也因此两条路径如果它们同伦，那么它们的卷绕数必须相同。本文仅粗略理解即可

若一个拓扑空间中不存在分离的非空开集，意味着空间中的任意两点都能以连续路径相连，并且空间内的任意两个闭合的路径（后续称闭曲线）都是同伦的，则我们称这个空间是**单连通**的。在直观上，单连通空间中所有闭曲线都能连续地收缩到一点。

Jordan 曲线（若尔当曲线，又称简单闭曲线）是指平面上的非自交封闭曲线。***相比 Lars Ahlfors 的教材里老爱用的 x 在 y 内同调于 0，在大部分那种只是强调 “围成区域内部没有洞” 的情况下，我会更优先使用 Jordan 曲线来定义。想到这里，尽管我真的很想写点拓扑学同调论什么的，我还是忍住了。*** ***原地挖坑也不是不行***

多嘴一句，仅个人观点，我认为对拓扑学（尤其是代数拓扑）和抽象代数的基本概念，至少有较为全面的概念上的认知，是学数分前应有的基础。这样一来不仅你可以很好地将概念和定义联系在一起，还能更好地应对那些特别喜欢用各种 Topology 相关的名词来描述概念的国外教材* 据了解，国外很多课程是会先学些拓扑学的，数学系教材里的描述相比一些国内非数学系的教材会抽象点。

柯西积分定理

定义与黎曼证明

先写教科书上常见的定义：一个定义在单连通区域 D 上的解析函数 $f(z)$ 沿 D 中的任意一条封闭可求长的曲线的曲线积分为零。

黎曼证明的方法是非常简单的，因此在教材中经常被作为典型的证明方法。因为 $f(z)$ 在 D 上是解析函数，因此 $f'(z)$ 存在，只是该证明方法额外需要的条件是 $f'(z)$ 在 D 内连续。

回顾一下格林公式，在闭区域 D 中的两个二元函数 $P(x,y), Q(x,y)$ 在 D 内的一阶偏导数存在且连续，考虑 D 的边界曲线 C，我们有：

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_C (P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y)$$

应用之前的变换和格林公式：

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\mathrm{d}z &= \int_C u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + i\int_C v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y \\ &= \iint_D \left(-\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + i\iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

还是因为 $f(z)$ 是解析函数，所以 CRE 成立，我们知道 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$，故：

$$\iint_D \left(-\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,\ \ \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

证得：

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = 0$$

闭路变形原理

为了将柯西积分定理推广到多连通区域，我们会用如下更一般的定义：

考虑区域 $D \in \mathbb{C}$ 和函数 $f: D \to \mathbb{C}$，有两点 $x, y \in D$ 被两条可求长的曲线 C_1, C_2 连接，并且 C_1 和 C_2 同伦，此时：

$$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z$$

这样，我们可以不必限制路径的选取，而只需要考虑路径的同伦类。

特别的，如果 C 是与常值映射同伦的可求长封闭曲线，这条曲线可以通过连续的变形变成一个常值曲线，则：

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0$$

有部分教材会将同伦这个性质所体现出的，解析函数在区域内沿闭曲线的积分值不因曲线路径在区域内连续变形而变化的事实称作“闭路变形原理”。

复合闭路定理

复合闭路定理算是柯西积分定理的一个比较重要的推论。考虑多连通域 D 和其中的闭曲线 C，其中有多条闭曲线 $C_1, C_2, \ldots, C_n$ 在 C 内部互不包含互不相交。考虑 D 内的解析函数 $f(z)$，定义 $\Gamma = C_1 + C_2 + \ldots + C_n$，有：

$$\oint_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$$

并且：

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)\mathrm{d}z$$

柯西积分公式

> 不要再把**柯西积分定理**和**柯西积分公式**搞混了，它们不是一个东西啊 kora！

考虑单连通的开集 $U \in \mathbb{C}$ 和解析函数 $f : U \to \mathbb{C}$，在 U 内的正方向的 Jordan 曲线 C，对于函数 f 在 C 内部的点 z_0，有：

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^+} \frac{f(z)}{z - z_0} \mathrm{d}z$$

简要证明

考虑一个去掉了 z_0 的函数 $F(z)=\dfrac{f(z)}{z-z_0}$，其余的部分仍然解析。以 z_0 为圆心，$r>0$ 为半径作圆 R，R 及其内部都在 D 内，对 R 和 C 的围成区域应用柯西积分定理的多连通区域推广得到：

$$\oint_C F(z)\mathrm{d}z=\oint_R F(z)\mathrm{d}z$$

解析函数 $f(z)$ 与积分变量无关，因此上式的 r 无论多小都是成立的。我们只需要考虑半径 r 足够小，当半径趋近于0时，积分路径 R 逐渐收缩到 z_0。我们只需要证明：

$$\lim_{r\to 0}\int_R F(z)\mathrm{d}z=\lim_{r\to 0}\int_R \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z=2\pi f(z_0)$$

考虑参数化路径 $z-z_0=re^{i\theta}$，其中 $0\leq\theta\leq 2\pi$，则有 $\mathrm{d}z=re^{i\theta}i\mathrm{d}\theta$，来推：

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0}\oint_R F(z)\mathrm{d}z&=\lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+re^{i\theta})}{re^{i\theta}}re^{i\theta}i\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{2\pi}\lim_{r\to 0}f(z_0+re^{i\theta})i\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{2\pi}\lim_{r\to 0}f(z_0)i\mathrm{d}\theta\\&=2\pi i f(z_0)\end{aligned}$$

将结果代回柯西积分公式，等式成立。

最大模原理

顺带一提，所谓最大模定理，指的是在有界区域内，不是常数的解析函数的模取值不会在内部达到局部最大值，意思是这个最大值只能在边界上取到。

高阶导数公式

解析函数是无穷可导的。我们将柯西积分公式推广到更一般的情况，便能得到解析函数的高阶导数公式，这样就能用求导的方法来算积分，或者反过来用积分代替求导。公式由曲线积分给出：

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z$$

柯西不等式与 Liouville 定理

通过应用高阶导数进行推论，我们可以得到更多结论。

一个函数在一个区域内解析，并且它在该区域的边界上的模有一个上界，那么在这个区域内该函数的模也是有界的，并且模的上界不会超过边界上的模的上界。

考虑在 D 上解析的函数 $f(z)$，并且 $|f(z)| \leq M$，则对于 D 中的任意 z_0，我们以 z_0 为圆心作圆周 $C: |z - z_0| = L$，L 及其内部都在 D 内，则有：

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!M}{L^n}$$

证明起来很简单，用绝对值不等式套进去代一代就行了。

$$|f^{(n)}(z_0)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} \mathrm{d}z \right| |\mathrm{d}z| \leq \frac{n!}{2\pi i} \cdot \frac{M}{L^{n+1}} \cdot 2\pi L$$

因此：

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!M}{L^n}$$

证得柯西不等式。

另外还有个大名鼎鼎的 Liouville 定理，说的是在复平面上解析的函数 $f(z)$ 有界，则它必是常函数。利用柯西不等式对函数的一阶导数进行放缩即可证。考虑任意的 $z_0 \in \mathbb{C}$，对于任意的 $L > 0$，$f(z)$ 在 $|z - z_0| < L$ 内解析，再设 $|f(z)| \leq M$，由柯西不等式得：

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{R}$$

反之，如果一个解析函数在全复平面上不是常数，那么根据 Liouville 定理，它必定是无界的。

解析函数的级数展开

解析函数是可以通过无穷级数展开的函数，并且这个级数在函数定义域内收敛于该函数，因此我们也会称这个级数为收敛幂级数。其性质在后面的研究很重要。

Taylor 级数

现在我们已经知道了，幂级数在一个所谓收敛圆内是一个解析函数，因此我们要考虑如何将函数展开为复幂级数。我们将能够被表示为幂级数形式的函数称为解析形的函数。

> 注：此概念在实数和复数都是适用的，但是此处为了符合主题而使用“解析”来形如一个函数，而非在基础的高等数学中我们更常用于形容实函数的“无穷可微”。

在实变函数论中，我们讨论泰勒公式的初衷是用于一个 在定义域内无穷可微的实函数 的泰勒级数的部分和逼近某个点。类似地，在这里我们需要的也是一个泰勒级数。对于一个在实数/复数 z_0 的邻域上的解析的实函数/复函数，大家所熟知的泰勒级数形式如下：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

函数在某点解析的充要条件是它在这点的邻域内可以展开成幂级数，这也是幂级数在我们研究解析函数的性质如此重要的原因。虽然但是，理想很美好，现实这个条件还是相当苛刻的。

函数 $f(z)$ 的 n 阶泰勒级数的余项可以记为：

$$R(z)=f(z)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$$

$f(z)$ 在 z_0 的某邻域中能够展开为幂级数的充要条件是它的泰勒级数的余项在该邻域中处处收敛于0。

泰勒定理

根据复幂函数的性质，考虑在 D 内的解析函数 $f(z)$，对于 $z_0\in D$ 有开圆 $O=\{z:|z-z_0|<R,R>0\}\in D$，则函数在 O 上有**唯一**展开式：

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

推广柯西积分公式，便可以如此表示泰勒系数 c_n，C 是以 z_0 为中心、任意小的正向闭曲线，整个路径都在区域 D 内，定义为 $|z-z_0|<R-\varepsilon,\varepsilon>0$。而积分符号表示沿着路径 C 对被积函数进行积分。展开项的系数被定义为：

$$c_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta$$

反过来说，一个函数在 D 解析的充要条件就是它在 D 中的点均有其泰勒展开式。

Laurent 级数

洛朗级数是一种在复平面上的某个环形区域内展开的级数，它同时包括了正幂次和负幂次的项。洛朗级数的收敛域通常是一个环状的区域，称为洛朗展开的收敛环。它在收敛环的两个边界上都可以收敛，这种同时在其收敛域的两个边界上收敛的级数，我们称之为双边幂级数。

洛朗级数经常被用于表示圆环上的解析函数，是包含了正负次幂的级数。考虑在环域 $Q: R_1 < |z - z_0| < R_2$ 的解析函数 $f(z)$，则函数必定在 Q 上有唯一展开式：

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

如果 $R_1 < R_2$ ，级数在 Q 内绝对一致收敛，并且 $f(z)$ 是 Q 内的解析函数，Q 被称作级数的收敛环。而若 $R_1 > R_2$，则级数处处发散。

一般我们会关注的是洛朗级数的负幂部分 $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z - z_0)^{-n}$，因此这个部分又被称作 $f(z)$ 主部，剩下的非负部分 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ 则被称为 $f(z)$ 正则部。而对于展开级数的圆环中心，函数的奇点会是一个好选择，这在正文的留数会写到。

洛朗定理

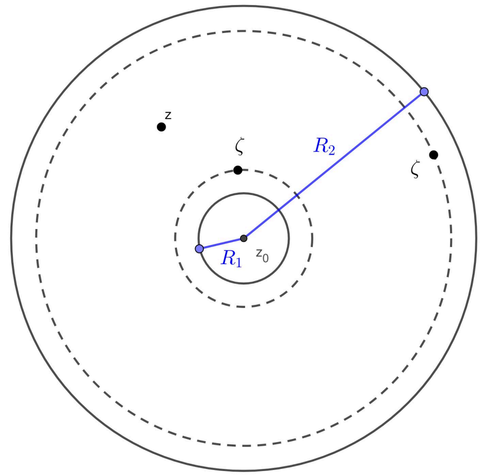
对于 $f(z)$ 在环域 $Q: R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内部的某个单值解析的点 z，$f(z)$ 一定可以展开为幂级数。而我们考虑环域内以 z_0 为中心做的任意 Jordan 曲线 C，则此处的洛朗级数的系数 c_n 定义为：

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}\zeta$$

而在环域 $Q: R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内解析的函数 $f(z)$，必定可以展开为形如 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ 的双边幂级数。

简要证明

设 z 是环域 $Q: R_1 < |z-z_0| < R_2$ 内的某点，我们对洛朗定理证明的思路在于，将函数 $f(z)$ 分为两个函数 $g(z)+h(z)$，证明它们在 ∞ 处有一个可去奇点的情况下，$g(z)$ 可以展开为 $(z-z_0)$ 的非负数次幂级数而 $h(z)$ 可以展开为 $\frac{1}{(z-z_0)}$ 的非负数次幂级数。



作两个圆周，其中 $R_1 < r_1 < |z-z_0| < r_2 < R_2$:

$$C_1 : |\zeta - z_0| = r_1$$

$$C_2 : |\zeta - z_0| = r_2$$

r_1, r_2 如何无关紧要，因为如果 z 不在圆周上，它们就不会影响积分值，故我们只需要保证不等式能满足即可。由柯西积分公式确定表达式，得:

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta$$

$$h(z) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta$$

对于 $g(z)$ 和 $|z-z_0| < r_2 < R_2$，直接套泰勒定理即可（注意是泰勒定理里的定义！）：

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \,\mathrm{d}\zeta$$

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

对于 $h(z)$ 和 $R_1 < r_1 < |z-z_0|$，我们可以关注到:

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)} \left[\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \right]$$

然后对中括号里的项进行几何级数展开，再代回去:

$$\frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n$$

$$
\begin{aligned}
h(z) &= -\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n \, \mathrm{d}\zeta \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^{-n} \left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} \, \mathrm{d}\zeta\right)
\end{aligned}
$$

上式的部分显然也能直接套泰勒定理：

$$
c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} \, \mathrm{d}\zeta
$$

$$
h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{-n}(z - z_0)^{-n}
$$

综合 $g(z), f(z)$ 可得：

$$
\begin{aligned}
f(z) &= g(z) + h(z) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_{-n}(z - z_0)^{-n} \\
&= \sum_{-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n
\end{aligned}
$$

证毕，手打 Latex 已经酸了。

意义是显然的。洛朗展开是泰勒展开的推广。 Taylor 级数只适用于解析函数在某个点的局部展开，我们只能就此了解到关于函数在该点附近的东西。而洛朗展开式则弥补了这一局限性，允许我们在圆环区域内对函数进行展开，适用于包含奇点的区域。

> 你的 Taylor 级数比较局限，但是你的负幂次项又弥补了这一部分。如果只做泰勒展开的话，可能就会显得你展开的区域比较局限，可能就会出现一些啊漏奇点做错题的情况。

顺带一提，感兴趣的读者可以去翻翻 *Lars Ahlfors* 的书对洛朗定理的证明，前半段思路大致一样而对 $h(z)$ 的变换挺优雅的（本文的写法是大部分教教材会用的代入方法）。

留数理论

留数，即“保留下来的数”，是指复变函数在奇点附近的 Laurent 级数展开式中负幂次项的系数，作为一个复变函数在孤立奇点的一个重要特征。留数理论主要就是以使用洛朗级数对孤立奇点的邻域内的性质进行研究，再进一步用于一些算积分的技巧，是我们走向积佬不可少的技能。

关于解析函数与级数，见我发布的预章 *友好的 复分析导读 II - Pre*。

孤立奇点

一个函数 $f(z)$ 在点 z_0 处不解析，但在它的某个去心邻域 $0 < |z - z_0| < \delta$ 内处处解析，则我们称 z_0 是 $f(z)$ 的一个孤立奇点。

若函数 $f(z)$ 有孤立奇点 z_0，则 $f(z)$ 在 z_0 点的某去心邻域 δ 可以展开成洛朗级数：

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

实际上我们会关注的是洛朗级数的负幂部分 $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z - z_0)^{-n}$，因此这个部分又被称作 $f(z)$ 主部，剩下的非负部分 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ 则被称为 $f(z)$ 正则部。

可去奇点

如果我们能够使 $f(z_0) = C_0$，就能使得整个邻域 δ 内的 $f(z)$ 是解析的，因此符合这个条件的奇点我们称之为可去奇点。这种情况最典型的解决方法就是对奇点进行定义。

$f(z)$ 在可去奇点 z_0 的邻域 δ 内的洛朗展开没有主部。若孤立奇点 z_0 为可去奇点，则 $\lim_{z \to z_0} f(z) = c_0$。

可去奇点说到底都不能算是一个正儿八经的奇点，它的极限存在而留数为0，因此一般而言我们没有必要去求可去奇点处的留数。

极点

$f(z)$ 在 z_0 点的某去心邻域 δ 展开成洛朗级数会有有限个 $n < 0$ 使得 $c_n \neq 0$，那么 z_0 是 $f(z)$ 的极点。

$f(z)$ 在极点 z_0 的邻域 δ 内的洛朗展开的主部仅有有限项。若孤立奇点 z_0 为极点，则

$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$。

本质奇点

函数在本质奇点处的洛朗展开具有无穷个负数幂次的项（天啊多么糟糕你说是吧）定义就是，$f(z)$ 在 z_0 点的某去心邻域 δ 展开成洛朗级数会有无限个 $n < 0$ 使得 $c_n \neq 0$，那么 z_0 是 $f(z)$ 的本质奇点。

若 z_0 是函数 $f(x)$ 的本质奇点，则 $\lim_{z\to z_0} f(z)$ 不存在，这也是一个充要条件。

留数

定义 $f(z)$ 在 Jordan 曲线 C 及其内部解析时，由柯西积分定理我们知道 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0$，这样简单粗暴。但是如果这样的函数在 C 内部存在孤立奇点，则不能这么套定理，我们不得不寻求另一种方法来算积分。

考虑一个唯一的值 R，使得 $f(z) - R/(z-z_0)$ 的某个去心邻域 $0 < |z-z_0| < \delta$ 内具有解析函数，即为 $f(z)$ 在 $z = z_0$ 处的留数，这个条件确保了在 $z = z_0$ 的邻域内不存在奇点。留数表示为 $\mathrm{Res}(f(z), z_0)$，无歧义时亦可以表示为 $\mathrm{Res}(z_0)$

考虑 z_0 是 $f(z)$ 在的一个孤立奇点，则 $f(z)$ 在 $z = z_0$ 处的留数是函数在此处的洛朗级数展开式为：

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

而为了计算留数，我们一般会取洛朗展开式中作为系数的负幂次项 c_{-1}，因为简单，在预章我们知道洛朗级数的系数定义（实际就是柯西积分公式的推广）为：

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z$$

代入可得：

$$\mathrm{Res}(z_0) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\mathrm{d}z$$

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{Res}(z_0) 2\pi i$$

注意，根据定义可知，我们不应该尝试去求非孤立奇点的留数，就例如在某处的无数个奇点不是孤立

的，你没法对其进行洛朗展开，何谈求?

留数定理

先写较为一般的定义。考虑单连通开集 D ，函数 $f(z)$ 在 D 内除了有限个孤立奇点外处处解析。闭合曲线 C 在 D 内部包围了这些奇点，并且 C 本身不经过任何奇点，设 C 关于 z_k 的卷绕数为 $w(z_k)$ ，则有:

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} w_k \operatorname{Res}(z_k)$$

但是如果 C 是 Jordan 曲线，则意味着 w_k 都为 1，则有:

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(z_k)$$

有限点的留数

- 函数在可去奇点处的留数为 0
- 函数在本质奇点处的留数需要将函数展开成洛朗级数求其系数 c_{-1}，定义在前面已有。

极点除了用洛朗级数展开硬算，还有一种较为常用的特殊方法:

I

此处再给出一个判断孤立奇点是否为极点的充要条件，考虑一个函数 $\lambda(z) \neq 0$ 也在 z_0 及其邻域 δ 内解析，则 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶极点:

$$f(z) = \lambda(z)\frac{1}{(z-z_0)^m}$$

则根据定义，我们有:

$$\operatorname{Res}(f(z), z_0) = \frac{\lambda^{m-1}(z_0)}{(m-1)!}$$

显然，若 $m=1$，则上式退化成:

$$\operatorname{Res}(f(z), z_0) = \lambda(z_0)$$

II

还有一种很常见的形式为 $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$，其中 $P(z), Q(z)$ 在 z_0 及其邻域 δ 内解析，z_0 是 $Q(z)$ 的一阶零点且 $P(z) \neq 0$，则有（应用洛必达法则即可得到）：

$$\text{Res}(f(z), z_0) = \lim_{z \to z_0}(z - z_0)\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

对数留数

一个函数 $f(z)$ 在闭曲线 C 上解析且非零，在 C 内部亚纯（*注：至今我还没在文内用过这个词，指函数在区域内没有除了可去奇点和极点以外的奇点，是比解析要弱的性质*），而有积分形如：

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z$$

由于 $\dfrac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = \mathrm{d}\ln f(z)$，因此我们称这个积分为 $f(z)$ 在 C 上的对数留数。再设 $f(z)$ 在 C 内零点个数为 Z，极点的个数为 P，并且重零点和重极点应按其阶数重复计数，有：

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = Z - P$$

这很酷！对数留数可以反映闭曲线内部函数的零点和极点个数的关系，这在之后将会被进一步推广。

辐角原理

一样的定义，函数 $f(z)$ 在闭曲线 C 上解析且非零，在 C 内部亚纯，z 沿 C 正向绕一圈的辐角的变化量我们记作 $\Delta_C \arg f(z)$，有：

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = \frac{\Delta_C \arg f(z)}{2\pi} = Z - P$$

特殊地，若 $f(z)$ 在 C 内没有奇点，即 $f(z)$ 在 C 内解析，则上式变成了：

$$\frac{\Delta_C \arg f(z)}{2\pi} = N$$

儒歇定理

再设 $f(z), g(z)$ 在 Jordan 曲线 C 及其内部解析，且在 C 上满足 $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$，则在

C 内 $f(z)$ 和 $f(z)+g(z)$ 的零点数相等。

之前看过一个关于儒歇定理很有意思的讨论，就是说主人用狗绳牵着狗，绕一棵树转（树被视为一点，而人不会接触到树），只要狗绳的长度总是小于主人与树的距离，狗再怎么跑也不会自己绕着树转多余的圈，故狗绕树转的圈数等于主人绕树转的圈数。

我们还能推广一下，如果函数仅在 C 及其内部亚纯，其他条件同上，则:

$$Z(f(z))-P(f(z))=Z(f(z)+g(z))-P(f(z)+g(z))$$

Next

嗯，先这样吧。如 I 所写的，之后复分析导读也会这么慢慢推主线，泛函分析也可以开始挖坑了。
关于用留数计算实积分的部分，因为很重要（严格来说算是留数应用的重点），我会在有空时专门开个短文来写，啊，就这样。

引用资料

1. Lars V. Ahlfors. *Complex ANALYSIS*
2. 李红，谢松法 *《复变函数与积分变换》*
3. Sébastien Boisgérault. *Cauchy's Integral Theorem*
4. Jeremy Orlof. *18.04 S18 Topic 8: Residue Theorem*

Ouyang Anqiao 03:18 20/05/2024

gzanqiao@hotmail.com