

Weyl 群表示论极简笔记

Anqiao Ouyang

Feb 14, 2025

Theorem of the Highest Weight (最高权理论)

每个不可约表示都包含一个特定的向量，它在某个Borel子代数（或Cartan子代数的正根空间）作用下是最高权。这意味着有限维不可约表示可以通过其最高权（highest weight）唯一确定。

设 \mathfrak{g} 为一个半单李代数， \mathfrak{h} 是其Cartan子代数。通过选定一组正根 Δ^+ ，任一有限维表示 V 都可分解为一系列权空间

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda, \quad V_\lambda = \{v \in V \mid h \cdot v = \lambda(h)v, \forall h \in \mathfrak{h}\}$$

在这一分解中，存在一个最高权 λ_0 唯一确定了表示 V 的结构，满足

$$V_{\lambda_0} \neq \{0\} \quad \text{and} \quad V_{\lambda_0 + \alpha} = \{0\} \quad \forall \alpha \in \Delta^+$$

Weyl 群及其构造

Weyl 群是由根系统中各个根对应的反射所生成的有限Coxeter群。

定义

首先我们定义根系统与内积空间

- **内积空间**: 设 V 是一个实向量空间，并配备了正定内积 (\cdot, \cdot) 。在许多应用中， V 通常取为Cartan子代数的对偶空间 \mathfrak{h}^* 。
- **根系统**: 令 $\Phi \subset V$ 为一个有限集合，满足:
 1. **生成性**: Φ 生成 V 。
 2. **对称性**: 对于任意 $\alpha \in \Phi$ ，有 $-\alpha \in \Phi$ 。
 3. **反射不变性**: 对任意 $\alpha, \beta \in \Phi$ ，定义反射

$$s_\alpha(\beta) = \beta - 2 \frac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha$$

则有 $s_\alpha(\beta) \in \Phi$ 。

4. **整性条件**: 对于所有 $\alpha, \beta \in \Phi$ ，有 $2 \frac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}$ 。

对于根系统中的每个非零根 $\alpha \in \Phi$ ，定义对应的反射

$$s_\alpha : V \rightarrow V, \quad s_\alpha(v) = v - 2 \frac{(v, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha$$

该映射在几何上表示关于垂直于 α 的超平面的反射，是一个正交变换。

由所有这些反射生成的群

$$W = \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Phi \rangle$$

就称为该根系统的Weyl群。由于根系统是有限集合，且每个反射都是线性变换，因此Weyl群是一个有限反射群。

构造

设 \mathfrak{g} 为一个半单李代数，选取其Cartan子代数 \mathfrak{h} ，可以得到根系统 $\Phi \subset \mathfrak{h}^*$ ，其中每个根 α 对应于 \mathfrak{g} 中的一个根空间。

在根系统中选取一个正系统（即划分 Φ 为正根与负根），并从正根中选取一组不可再分的极小正根，称为**简单根集合** Δ 。每个根都可以写成简单根的整数线性组合，其中正根的系数均为非负整数。

对于每个简单根 $\alpha \in \Delta$ ，构造反射 s_α 。利用生成元构造群

$$W = \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Delta \rangle$$

由根系统的对称性，实际上所有 s_α ($\alpha \in \Phi$) 都可以由简单根对应的反射表示，因此这个生成了的群已经涵盖整个Weyl群。

Weyl群可以被视为一个Coxeter群，其生成元为简单根对应的反射 $\{s_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$ ，满足关系

$$(s_\alpha s_\beta)^{m(\alpha, \beta)} = 1$$

其中 $m(\alpha, \beta)$ 是依赖于简单根 α 与 β 之间夹角的整数：

- 当 $\alpha = \beta$ 时， $m(\alpha, \alpha) = 1$ （反射的平方为恒等映射）
- 当两根成 90° 时， $m(\alpha, \beta) = 2$ ；成 120° 时， $m(\alpha, \beta) = 3$ ；成 135° 时， $m(\alpha, \beta) = 4$ ；成 150° 时， $m(\alpha, \beta) = 6$

Weyl 特征公式

我不喜欢自问自答故弄玄虚的老套风格，但是有没有一种计算有限维不可约表示特征的方法？有的！

设 \mathfrak{g} 为一个半单李代数， \mathfrak{h} 为其Cartan子代数， λ 为一个最高权（dominant weight），且 $V(\lambda)$ 是权最高为 λ 的不可约表示。那么其特征公式由如下表达式给出：

$$\text{ch } V(\lambda) = \frac{\sum_{w \in W} \epsilon(w) e^{w(\lambda + \rho)}}{\prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - e^{-\alpha})}$$

其中：

- W 是Weyl群（即由根系生成的Coxeter群）
- $\epsilon(w)$ 是Weyl群元素 w 的行列式（即 $+1$ 或 -1 ）
- Δ^+ 是一组正根
- ρ 为半和根，定义为 $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha$

Weyl 维数公式

我们需要在特征公式中令所有形式指数取值1，但直接令 $e^\mu = 1$ 会得到不定形式 $0/0$ 。为避免这种情况，我们用参数 t 替代，把公式中的指数改写为 $e^{t\mu}$ 。即考虑

$$\text{ch } V(\lambda; t) = \frac{\sum_{w \in W} \epsilon(w) e^{t w(\lambda + \rho)}}{\prod_{\alpha \in \Delta^+} (e^{t\alpha/2} - e^{-t\alpha/2})},$$

对于任意 μ ，当 $t \rightarrow 0$ 时有

$$e^{t\mu} = 1 + t\mu + \frac{t^2 \mu^2}{2} + \dots$$

对于分母中的每个因子

$$e^{t\alpha/2} - e^{-t\alpha/2} = 2 \sinh\left(\frac{t\alpha}{2}\right)$$

当 $t \rightarrow 0$ 时，利用 $\sinh x \approx x$ 得

$$e^{t\alpha/2} - e^{-t\alpha/2} \approx t\alpha$$

因此分母的整体近似为

$$\prod_{\alpha \in \Delta^+} (e^{t\alpha/2} - e^{-t\alpha/2}) \approx t^{|\Delta^+|} \prod_{\alpha \in \Delta^+} \alpha$$

分子为

$$\sum_{w \in W} \epsilon(w) e^{t w(\lambda + \rho)}$$

同样展开得

$$\sum_{w \in W} \epsilon(w) \left(1 + t w(\lambda + \rho) + \frac{t^2}{2} w(\lambda + \rho)^2 + \dots \right).$$

注意到常数项 $\sum_{w \in W} \epsilon(w) = 0$ （当 W 非平凡时），所以分子的最低阶非零项是 $O(t)$ 或更高阶项，其阶数最终会与分母中的 $t^{|\Delta^+|}$ 相互抵消，得出一个有限的极限。

所以当 $t \rightarrow 0$ 时，我们可以提取出维数信息

$$\text{ch } V(\lambda; t) \Big|_{t \rightarrow 0} = \dim V(\lambda)$$

设 \mathfrak{g} 为半单李代数， \mathfrak{h} 为其Cartan子代数， Δ^+ 为正根集合，且定义半和根为

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha$$

对于一个最高权 λ 对应的不可约表示 $V(\lambda)$ ，Weyl维数公式给出其维数为

$$\dim V(\lambda) = \prod_{\alpha \in \Delta^+} \frac{\langle \lambda + \rho, \alpha \rangle}{\langle \rho, \alpha \rangle}$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示在 \mathfrak{h}^* 上的内积。