

理解下半连续性与极小化问题的可解性

Anqiao Ouyang

December 20, 2024

在变分法中，我们最常遇到的问题可以抽象为以下形式：

$$\inf_{u \in X} F(u),$$

其中 X 是一个函数空间（例如 Banach 空间或 Hilbert 空间），而

$$F : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$$

是一个泛函。

这样的问题出现在许多情境中，最典型的例子之一是偏微分方程的弱解理论。

本文关注的是**存在性问题**。我们并不讨论如何实际找到极小解，我们讨论的问题只有一个：“这个下确界是否真的能由某个 $u \in X$ 取到？”

换句话说，我们希望知道是否存在 $u^* \in X$ ，使得

$$F(u^*) = \inf_{u \in X} F(u)$$

需要注意的是，极小解的存在性与其他性质彼此独立。即使极小解存在，它也不一定唯一；即使存在唯一解，也未必具有良好的正则性。因此，在接下来的讨论中，我们将刻意只关注“是否存在极小解”，而不涉及唯一性或解的进一步性质。

在有限维空间中，这类问题往往可以借助紧性与连续性直接处理；但在无限维空间中，情况截然不同。通常，我们无法显式构造一个极小解，只能采取如下策略：选取一系列使泛函值逐渐逼近下确界的序列 (u_n) ，也就是所谓的极小化序列，然后尝试分析它的极限行为。

因此，极小化问题的存在性实际上取决于两个关键点：第一，这样的序列是否存在“足够好的”极限；第二，即使极限存在，泛函值在取极限时是否能够保持不增加。

存在性证明的标准流程

由下确界的定义，总可以选取一系列 $(u_n) \subset \mathcal{A}$ 使得

$$F(u_n) \downarrow \inf_{u \in \mathcal{A}} F(u).$$

这列序列叫极小化序列（minimizing sequence）。这一步通常不难，因为它只是“按下确界的定义选点”。

仅有 $F(u_n)$ 逼近最小值，并不保证 u_n 在空间里有任何收敛性。一个典型问题是： u_n 可能在 X 中越跑越远（范数发散），但 $F(u_n)$ 仍然可以下降。

因此我们需要一种机制，从“能量值有界”推出“序列在 X 中有界”。最常见的条件是强制性 (coercivity)：

$$\|u\|_X \rightarrow \infty \Rightarrow F(u) \rightarrow \infty,$$

或更常用的估计形式

$$F(u) \geq c\|u\|_X^p - C \quad (c > 0).$$

它的作用很直接。如果 $F(u_n)$ 不会趋于无穷大（极小化序列通常如此），那么 $\|u_n\|_X$ 就不可能趋于无穷大，于是 (u_n) 在 X 中有界。

在 $\mathbb{R}^n$ 中，有界序列总能抽出强收敛子列。但在无穷维空间里，“有界”一般不保证强收敛子列存在。

变分法的常见做法是改用弱收敛，因为在许多空间里，有界序列至少能抽出弱收敛子列。例如，如果 X 是反身 (reflexive) Banach 空间（特别是所有Hilbert 空间），则

$$(u_n) \text{ 有界} \Rightarrow \exists \text{ 子列 } u_{n_k} \rightharpoonup u.$$

这一步的核心思想是：我们接受一种更弱的收敛方式，换取“极限对象确实存在”。

即使 $u_{n_k} \rightharpoonup u$ ，也不自动保证 $u \in \mathcal{A}$ 。如果约束在取极限时丢失，那么极限点无法作为解。

因此我们需要 $\mathcal{A}$ 对弱收敛稳定：

$$u_n \in \mathcal{A}, u_n \rightharpoonup u \Rightarrow u \in \mathcal{A}.$$

教材里通常说 $\mathcal{A}$ 是弱闭 (weakly closed) 的。

现在我们有候选极限 $u \in \mathcal{A}$ 。剩下的问题是如何证明它真的达到最小值。

我们知道

$$F(u_{n_k}) \rightarrow \inf_{\mathcal{A}} F,$$

但弱收敛通常不足以推出 $F(u_{n_k}) \rightarrow F(u)$ 。所以我们真正需要的不是等号，而是一个方向正确的不等式：

$$F(u) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} F(u_{n_k}).$$

一旦成立，就有

$$F(u) \leq \liminf F(u_{n_k}) = \inf_{\mathcal{A}} F,$$

而 $u \in \mathcal{A}$ 又意味着 $F(u) \geq \inf_{\mathcal{A}} F$ ，因此

$$F(u) = \inf_{\mathcal{A}} F,$$

极小解存在。

这里出现的 $\liminf$ 是因为在弱收敛下，泛函值通常只能稳定地得到“下界方向”的结论。

下半连续性的定义与作用

Definition 0.1 (弱下半连续). 称 F 在 X 上弱下半连续 (weakly lower semicontinuous, w.l.s.c.)，如果对任意 $u_n \rightharpoonup u$ 都有

$$F(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F(u_n).$$

这条性质的作用可以概括为一句话：它保证了当我们用弱收敛抽取极限时，极限点不会比序列在极限意义下“更差”，从而使“逼近最小值”的信息可以传递到极限点上。

这里给一个可直接套用的存在性定理（直接法模板）

Theorem 0.2 (直接法的标准版本). 设 X 是反身 *Banach* 空间, $\mathcal{A} \subset X$ 非空且弱闭。若

- $\inf_{\mathcal{A}} F > -\infty$;
- F 在 $\mathcal{A}$ 上强制 (或足以推出任意极小化序列在 X 中有界);
- F 在 $\mathcal{A}$ 上弱下半连续;

则存在 $u \in \mathcal{A}$ 使得

$$F(u) = \inf_{u \in \mathcal{A}} F(u).$$

Remark. 这条定理的证明几乎就是把前一节的五步按顺序写成严谨文字。很多PDE与变分问题的“存在性证明”本质上都是在检查这三个条件 (有界性、弱紧性与下半连续性) 是否成立。

下面再给出一个最简单的例子来说明: 即使下确界存在, 也可能没有极小解。

令 $X = \mathbb{R}$, 定义

$$F(x) = \begin{cases} |x|, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

显然 $\inf_{\mathbb{R}} F = 0$, 因为取 $x_n = \frac{1}{n}$ 有 $F(x_n) = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ 。但是不存在 x 使 $F(x) = 0$: 当 $x \neq 0$ 时 $F(x) = |x| > 0$, 当 $x = 0$ 时 $F(0) = 1$ 。

这个现象说明极小化序列可以把函数值逼近下确界, 但极限点未必继承“极小性”。根源在于 F 在 0 处不是下半连续的。