



[点集拓扑] 拓扑学的基础概念

无痛地入门拓扑学 I - Theory

O. Anqiao

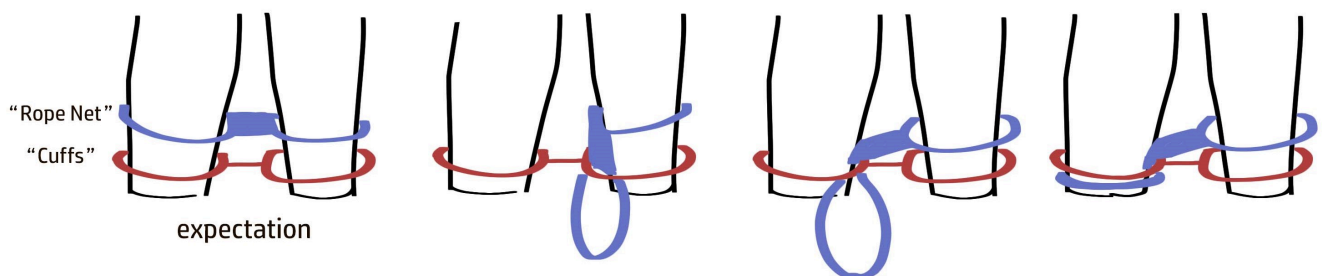
本文将分为两个部分发布，第一部分是 Theory，我将介绍有关拓扑空间、连续映射的基本性质与一些拓扑学基础概念；第二部分是 Methodology，我将着重于解释与第一部分有关的知识，在构造、证明等的应用。之所以如此分类，是因为我认为拓扑学这样抽象的数学是需要通过积累了解足够多的，具体的实例才能更好地理解、从而记忆的。

拓扑学概论

何为“拓扑”？“拓扑”一词源自希腊语 $\tau\acute{o}\pi\omicron\varsigma$ (topos)，意为“位置”、“地点”。拓扑学 (Topology) 也就是“位置的学说”，是数学的一个分支，主要研究在连续变换下不变的几何性质。拓扑学最初的研究包括高斯和黎曼的曲面理论、庞加莱的同伦和同调理论等。随着时间的推移，拓扑学研究的对象从具体的几何形状和空间扩展到更抽象的拓扑空间和映射。

我们可以说拓扑学属于几何学，但与我们从小初高所学的初等数学的几何是有区别的，初等数学老师会教、考试会考的几何学关注的对象多为点、线、面的度量性质，还有它们之间的位置关系等。但是在拓扑学中我们不关注这些具体的度量意义上的东西，很单纯地关注空间对象在变形、拉伸、压缩等情况下的不变性，可以说是一个相当抽象的数学分支了。

举个现实应用的例子...例如两个柱状物体被两个被连接在一起的环分别套住（形如手铐），而我们希望在不解开它的情况下，将一个绳网穿过这个“铐”，套进两个物体。我们将在“铐”之上的部分称作内侧，而将“铐”之下的部分称作外侧。做法是将整个绳网从环a塞进内侧，再将绳网从另一个环b的内侧穿到外侧，套上环b套住的物体后再塞回内侧，就成功了。



再来一个例子。例如说我们用绳子来束缚一个可以改变姿势的物体，绳子的捆绑形成了很多个具有观

赏性的交错的结，我们希望在解除特定绳结的情况下改变这个物体的姿势，这就能抽象成一个在受限情况下进行拓扑变换的问题。我们可以使用拓扑学知识设计绳子的路径，确保在绑缚过程中绳子不会形成使被捆绑物难以做必要活动的结，同时能提供稳定的约束。

我所阅读过的大部分拓扑学教材，尤其是偏基础的，都会从最基本的实数、集合论、逻辑语言等开始讲起...但是考虑到这些内容过于基础（网上容易查到），也会和以前的文章高度重复，本文将直接从拓扑空间开始。读者应当对集合论有一定的学习，如果有点分析基础会更好。可以翻翻我往期的实分析文章，很多概念对这篇文章是有用的。

拓扑学的主要分支包括一般拓扑学（点集拓扑）、代数拓扑、微分拓扑、组合拓扑和代数几何。这也是各个分支整体而言从基础到进阶的顺序，本文主要在涉及的是基础的**点集拓扑和代数拓扑**，要先掌握最基本的概念才能进一步学习对吧。在这两个分支我们主要会研究空间的基本性质和连续变换下的不变性、通过代数方法研究拓扑空间的代数不变量等等。

开始前，按本文主题，满怀诚意地向读者推荐点我用过的不错的拓扑学教材：

一般拓扑学（或点集拓扑）：

James Munkres. *Topology*

我个人觉得很适合入门的一本，就连我都能非常流畅地读完，概念的解释足够直观，推荐给每位刚上路的小伙伴。

John L. Kelley *General Topology*

相比 Munkres 可能稍微抽象一点，但难度还算是适合入门的。

代数拓扑学：

EH Spanier. *Algebraic Topology*

这本可能难度略高，我目前一刷还没完成。我代数拓扑入门看的是周建伟的《代数拓扑讲义》和网上各种各样的资源，但可能现阶段我对代数拓扑的学习并不够充分（主要是教材涉足不多不全），故暂时不多做评价和推荐。

拓扑的基础概念

我们先简要了解一下最基础的关于拓扑的概念以及定义。

拓扑空间

我们为一个集合赋予一个拓扑结构，满足一些性质使其成为一个名为拓扑空间的结构。在拓扑空间中我们往往不需要关注一个几何体具体的形态，而关心的是它连续形变也能保持的性质。因此我分不清咖啡杯和甜甜圈在几何意义上有什么区别，它们都有一个环，经过连续的形变都可以变成一个圆环。至于我们如何准确地描述它们的关系，后面会提到。

我们将一个集合 X 的幂集定义为：

$$\mathcal{P}(X) = 2^X = \{A | A \subseteq X\}$$

考虑集合 X 上的一个拓扑 τ 是 X 的某些子集构成的子集族，即 $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ ，满足：

1. $X, \emptyset \in \tau$
2. τ 中有限个集合的交集仍然在 τ 中
3. τ 中任意多个集合的并集仍然在 τ 中

则我们称 (X, τ) 是一个拓扑空间，无歧义时也可以直接称作 X 。

拓扑空间的子空间，是具备了原来拓扑空间上的拓扑所诱导的拓扑的它的子集（故我在习惯上是与“诱导拓扑”混叫的），而这拓扑叫做子空间拓扑。取决于这个子集开还是闭，又分为开子空间和闭子空间。

开集与闭集

在度量空间中我们经常用开圆/开球来表示以某个原点为圆心，含有某个半径内的所有点的，但不包括边界上的点的集合，它们具备开集公理同性的性质。为了在拓扑学中摆脱度量上的意义去描述这个概念，为此定义了开集这个概念。拓扑 τ 中的元素叫做开集，它的每个点都在它内部；开集的补集叫闭集。

我们可以利用开集的定义来拓扑描述（开集公理）：将上面的(2)变为 τ 中有限个开集的交集也是开的(3) τ 中任意的开集也是开的 **注意，由于拓扑 τ 中的元素叫做开集，这和之前的描述是等价的，这里特别提是为了用可能部分读者会比较熟悉的方式描述一遍。**

极限点与导集

考虑一个拓扑空间 (X, τ) 与其子集 $A \subseteq X$ ，如果对每一个包含 x 的开集 $U \subseteq X$ ，都存在一个点 $y \in A$ 使得 $y \neq x$ 并且 $y \in U$ ， $x \in X$ 被称为 A 的极限点（或称为聚点、积点）。

A 的所有极限点的集合被称为 A 的导集，我们记做 A' 。 A 本身与它所有极限点的集合我们称之为 A 的闭包，记做 \overline{A} 。

直观地说， x 是 A 的极限点，当且仅当在 x 的任意开邻域内都有至少一个不同于 x 的 A 中的点，也就是任意接近于 A 中其他点的点。

邻域基与拓扑基

先说邻域基。对于拓扑空间 (X, τ) 中的一点 x ，如果有一个集合族 \mathcal{B}_x 满足 x 的每个邻域都至少包含一个 \mathcal{B}_x 的元素，即对于 x 的任意一个邻域 U 都存在一个 $B \in \mathcal{B}_x$ 使得 $B \subseteq U$ ，则我们称之为点 x 的邻域基。

我们希望以较少的信息，也就是一部分足够的开集，还原出集合 X 的拓扑。拓扑基就能实现这件事，对拓扑的构造十分重要。

对于拓扑空间 (X, τ) ，如果满足

- $\forall x \in X$ 都存在 $A \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in A$
- 对于 $A, B \in \mathcal{B}$ 存在一族 $\{S_i\}_{i \in I}$ 使得 $A \cap B = \bigcup_{i \in I} S_i$

则我们称 \mathcal{B} 是 X 上的一个拓扑基。

显然，既然拓扑基能够用来生成整个拓扑，那我们就能用已有的拓扑基来构建出某点的邻域基。给定一个拓扑基 \mathcal{B} ，我们选出包含了某点 x 的元素，就是它的邻域基 \mathcal{B}_x ：

$$\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} | x \in B\}$$

另外，子基是生成一个拓扑基的一个集合。考虑集合 X ，对于 $A \in P(X)$ ，我们定义拓扑 τ 包含了 A 的有限交的并集和 X, \emptyset ，在这样的构造下， A 是这个拓扑的一个子基。

积空间

积空间是由两个或多个拓扑空间的笛卡尔积形成的新拓扑空间。我们知道对于两个集合，笛卡尔积是这么定义的：

$$X \times Y = \{(x, y) | x \in X, y \in Y\}$$

通过积空间我们可以构造出一个更大的拓扑空间，并在一些空间的定义下保持某些性质...这个后面会用到。

对于一族拓扑空间 $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2), \dots, (X_n, \tau_n)$ ，在它们的笛卡尔积 $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ 上定义拓扑基：

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{i=1}^n O_i : O_i \in \tau_i \right\}$$

我们将由 \mathcal{B} 生成的拓扑称作每个 τ_i 的积拓扑，而具备这样的拓扑的拓扑空间叫做积空间。

可数性公理

在实分析和泛函分析中，许多重要的结果都依赖于拓扑空间的可数性——有限当然很好，但无限就会很复杂，而在“无限”概念的分类中，我们知道可数无限会相对好处理，故我们针对拓扑空间的“可数性”可以更容易地进行定义。

第一可数空间

可数性第一公理指出，拓扑空间中每个点都有可数的邻域基，满足这一公理的拓扑空间我们称之为第一可数空间，亦称 C_1 空间。

第一可数空间的子空间也是第一可数空间、第一可数空间的乘积空间也是第一可数空间。

第二可数空间

不难看出，我们所谓关注的“第一可数”性，实际就是意味着某个空间在其拓扑中局部存在可数的信息，而第二可数空间比第一可数空间要强一些，我们希望空间全局存在可数的信息。

可数性第二公理指出，拓扑空间具有可数的拓扑基，满足这一公理的拓扑空间我们称之为第二可数空间，亦称 C_2 空间。

来一个也常见的说法：对于 X 的每个拓扑基 \mathcal{B} ，如果都有其确定的基数 $|\mathcal{B}|$ ，则 X 的拓扑基里最小的基数我们称之为 X 的权重，记作 $w(X)$ ：

$$w(X) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ is a base of } X\}$$

如果一个拓扑空间 X 的权重可数，即 $w(X) \leq \aleph_0$ ，则这个拓扑空间满足可数性第二公理，是一个第二可数空间。

可见第二可数性比第一可数性的性质要更强，这意味着所有第二可数空间同时也是第一可数空间。

连通性

如果 X 不能表示为两个不相交的非空开集的并，则它的拓扑空间 X 是连通的。反之，如果这两个非空开集存在，则称 X 是**不连通的**，直观上来说，这意味着 X 是可以被分割的。

一个最直观的例子就是 \mathbb{R} ，在 \mathbb{R} 上的任何闭区间、开区间和半开区间都是连通的。以及在任何拓扑空间中的单点集都是连通的。一个连通空间可能有多个连通分支，每个分支都是一个最大连通子集。例如，平面上的圆盘是一个连通空间，但可以通过移除中心点得到两个连通分支（即内圆和外圆）。

紧致性

我说过，当我们形容一个东西是“紧致”的时候，往往都是在形容它是一个好的东西，数学也不例外。我们都知道在欧几里得空间中，一个有界的闭集合是紧致的；亦或者是一个所有开覆盖都能找到其有限子覆盖的度量空间，也是紧致的。这是集合一个很重要的性质，此处给出拓扑角度的定义。

一个集合 X 的开覆盖是指一族开集 $\{U_i\}_{i \in I}$ 使得 $X \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ 。如果对于 X 的每一个开覆盖 $\{U_i\}_{i \in I}$ ，都存在有限子覆盖 $\{U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_n}\}$ 使得 $X \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_{i_j}$ ，则我们说 X 是紧致的。

分离公理

不可分性

如果 X 的子集 A 的闭包 $\overline{A} = X$ ，则我们称 A 是 X 的稠密子集。如果一个集合不存在可数的稠密子集，则我们说它是不可分的。

一个拓扑空间如果是不可分的，则它也不是第二可数的。很直观地，在实数集的通常拓扑下，实数集是可分的。而作为无限维赋范空间中的一个例子，希尔伯特空间既有可分也有不可分的情况。

常见的拓扑

度量拓扑

我们都熟悉欧氏空间，一个从小陪我们到大的度量空间，它显然是一个拓扑空间，这意味它有更好的性质，如何说？

对于一个非空集合 X ，我们称之为点集。配备一个度量函数 $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ ，满足

- 非负性: $\forall x, y \in X, d(x, y) \geq 0$ 且等号成立当且仅当 $x = y$
- 对称性: $\forall x, y \in X, d(x, y) = d(y, x)$
- 三角不等式: $\forall x, y, z \in X, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

则我们称 (X, d) 是一个度量空间，度量空间也是一种拓扑空间。

对于一个拓扑空间 (X, τ) ，我们可以由度量 d 诱导出它的拓扑结构，这叫做 Urysohn's metrization theorem，即能由度量 d 诱导出拓扑 τ 的拓扑空间，是可度量的（充要）。

并且其中的开集就定义为度量空间中的开集，对于任何的 $x \in X$ ，定义以 x 为中心、半径为 ϵ 的开球记为：

$$B_x(\epsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}$$

声明， X 的开集是定义为 $U \subset X$ 的子集，对于每个 $x \in U$ ，存在 $B_x(\epsilon)$ 使得 $B_x(\epsilon) \subset U$ ，可见，如果每个点都包含一个完全位于 U 中的小邻域，则该集合是开的。这样的定义中，开球 $B_x(\epsilon)$ 是拓扑基。

平凡拓扑

平凡拓扑是最简单的拓扑，只包含了 \emptyset 和 X 本身，任何的集合都可以具备这样的拓扑。

任何对 X 的开覆盖只有可能是空集或者 X 本身，因此每个开覆盖必定有一个子覆盖（即 X 本身），故 X 在平凡拓扑下是紧致的。

离散拓扑

对应地，可以说离散拓扑是最强的拓扑，包含了 2^X ，也就是 X 的所有子集。这也意味着 X 的每个子集都是开集。它之所以被称为离散拓扑，是因为它不存在包含多个点的连通子集，是完全不连通

的。

联系前面的内容，我们容易发现在离散拓扑中，单点集是开集，因此任何集合的极限点都是空集，也就是没有极限点。

连续映射

现在我们大概把最基础的概念都过了一遍，终于到了拓扑学的大门——连续映射。一个函数在拓扑空间之间的连续性可以通过拓扑结构来定义，而不是依赖于具体的度量。

作为 P1 的理论部分，我们会简单了解最基本的有关连续映射的概念，以及最常见的一些映射，以为后面“方法论”部分打好基础。

拓扑的收敛性

回顾一下在微积分文章的“数列极限”一节中，我们对一个数列收敛性的定义：

对于数列 $\{a_n\}$ ，若存在实数 L ，对于任意正实数 ϵ ，存在正整数 N ，使得当 $n > N$ 时， $|a_n - L| < \epsilon$ 成立，则称数列 $\{a_n\}$ 的极限为 L ，或是 $\{a_n\}$ 收敛于 L 。

既然是拓扑学，我们要讨论的当然是它在拓扑空间中的推广。我们首要考虑的是，拓扑空间中的收敛性不依赖于度量，而是只依赖于开集，所以定义为：

考虑拓扑空间 (X, τ) ，对于 X 中的点列 $\{x_n\}$ ，若 $x \in X$ 是 $\{x_n\}$ 的极限点，则我们说 $\{x_n\}$ 收敛于 x 。

连续映射的定义

基于拓扑空间中点列的收敛性的定义，我们也能很简单地定义拓扑空间中的连续映射。我们称将收敛序列映为收敛序列的映射称为序列连续映射，定义上：

对于 X 中的任意收敛序列，若在 Y 中均存在 $f(x_n) \rightarrow f(x)$ ，则我们称 f 在 x 处是序列连续的；而如果 f 在 X 的每一点都是序列连续的，则我们称之为序列连续映射。

另外，如果 X 是第一可数的，则其逆定理是成立的。但是请注意序列连续与连续的区别，非度量的定义中序列连续的性质比连续要弱。

但是既然要推广，我们应该也能考虑使用拓扑结构本身的性质来定义连续映射，回顾一下实函数连续性的 $\varepsilon - \delta$ 表述：

考虑一个实函数 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ，它在点 c 处是连续的，当且仅当对任意的 $\varepsilon > 0$ ，都存在一个 $\delta > 0$ ，使得对于所有的 x 满足 $|x - c| < \delta$ 时，都有 $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ 。容易发现，在这里我们会关注的是实数轴上的距离，仅此而已，那我们应该能考虑将它拓展到更一般的空间上。

注意到上述 f 在 c 连续的 $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ 也等价于 $f(x) \in (f(c) - \varepsilon, f(c) + \varepsilon)$ ，这就意味着我们要求 $f(x)^{-1}(f(c) - \varepsilon, f(c) + \varepsilon)$ 是一个开集。简单地说就是，连续要求开集的逆像是开集。

既然如此，我们的推广就很轻松了。同理地，考虑两个拓扑空间 (X, τ_X) 和 (Y, τ_Y) 。对于一个映射 $f : X \rightarrow Y$ ，如果 Y 中的每个开集 $U \in \tau_Y$ ，其原像 $f^{-1}(U)$ 是 X 中的开集，即 $f^{-1}(U) \in \tau_X$ ，则我们称 f 为 X 到 Y 的连续映射。将上面的总结套在这里就是，连续映射中，值域所在的拓扑空间中的每个开集的原像都是定义域所在拓扑空间中的开集。

同胚

考虑两个拓扑空间 (X, τ_X) , (Y, τ_Y) 和映射 $f : X \rightarrow Y$ ， f 与其反函数 f^{-1} 都是连续映射，且 f 是双射，则我们称 (X, τ_X) 和 (Y, τ_Y) 是同胚的，记做 $X \cong Y$ ，同胚的复合仍然是同胚。同胚保持了拓扑空间的拓扑性质，意味着两个同胚的空间在拓扑学上是等同的，它们的拓扑性质是相同的，但两个空间的几何结构和度量未必是相同的。

直观上地想象，我们将拓扑空间视作一个物体，而同胚的物体之间可以通过连续的变形相互转化。所以有一个我们耳熟能详的笑话：拓扑学家无法分别咖啡杯和甜甜圈（都有一个洞，它们是同胚的）

直观的例子

I. 实数轴上的开区间

一个最经典的例子，考虑在 \mathbb{R} 上取的开区间 $I = (0, 1)$ ，我们将其视为 \mathbb{R} 的子空间，则它与 \mathbb{R} 是同胚的。

然后我们可以很容易地构建出一个 $f : \mathbb{R} \rightarrow I$ ：

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x$$

不难发现，由于 $\arctan x$ 是连续的，而复合连续函数得到的还是连续函数。并且其逆映射

$f^{-1}(y) = \tan(\pi(y - \frac{1}{2}))$ 也是连续的, 故 f 是 \mathbb{R} 和 I 的同胚映射。

II. 球极平面投影

我们通过球极平面投影, 将球面上的点映射到平面上。选择北极点 $N = (0, 0, 1)$, 我们就能将单位球面 S^2 上除了 N 以外的点映射到 \mathbb{R}^2 上。

显然, 球极投影 $f: S^2 \setminus N \rightarrow \mathbb{R}^2$ 是连续的双射映射, 其逆映射也是连续的, 故去掉北极点的单位球面与 \mathbb{R}^2 。

这个性质推广到更高维度也是适用的。我们如此定义带有 \mathbb{R}^n 诱导拓扑而成为拓扑空间的 n 维的球面 S^{n-1} :

$$S^{n-1} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$$

类似地, 考虑 $N = (0, \dots, 0, 1)$, 从而定义球极映射 $S^{n-1} \setminus N \rightarrow \mathbb{R}^n$, 它也是一个连续的双射映射, 其逆映射也是连续的, 故 $S^{n-1} \setminus N$ 与 \mathbb{R}^n 是同胚的。

包含映射

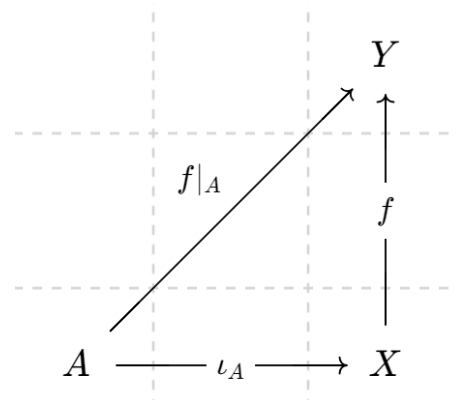
我们可以用描述一个集合作为另一个集合的子集时的自然嵌入。考虑一个拓扑空间 (X, τ) , $A \subset X$, 并且 A 配备了子空间拓扑。则其包含映射 $\iota: A \hookrightarrow X$ 是将每个 A 中的点映射到 X 中对应的点的函数。

既然我们刚看完连续性, 那就练练手。我们容易发现对于 X 的任意开集 U , $U \cap A$ 是 A 的开集, 而 $\iota^{-1}(U) = U \cap A$, 故包含映射在子空间拓扑下是连续映射。

反过来说, 如果 A 被赋予与 X 相同的拓扑, 那么包含映射 $\iota: A \hookrightarrow X$ 就可以被视为将 A 嵌入到 X 中, 即 A 是 X 的子集。

我们再考虑一个包含映射 $\iota_A: A \hookrightarrow X$ 和一个映射 $f: X \rightarrow Y$, 这么一来我们可以画出一个交换图。

容易得知 $f|_A = f \circ \iota_A$, 又因为包含映射在子空间拓扑下是连续映射, 可知 $f|_A$ 是 A 到 Y 的连续映射。



恒同映射

恒同映射将每个元素映射到其自身，保持集合或空间的结构不变。定义上很简单：

$$\mathbb{1}_X : X \rightarrow X$$

然后 $\forall x \in X$ ：

$$\mathbb{1}_X(x) = x$$

我使用 Vscode 的插件写 `\mathbb{1}` 无法渲染出来，这里公式的 $\mathbb{1}$ 是unicode

在拓扑空间中，恒同映射始终是连续的。

Next?

本文不长，给各位快速过了一遍拓扑学中最基础的概念。我的计划，除了完善点集拓扑（拓扑学 I）的“方法论”部分，同时我会准备 II，稍微涉及到基础的代数拓扑例如基本群、同调论等，以进行几何想象进一步的公理化研究。

关于“方法论”分篇的部分，我会尝试找到更多有效有代表性的例子来解释，我们如何运用这些拓扑学知识进行具体到例子的证明、构造等操作。

Ouyang Anqiao 20:12 01/06/2024

gzanqiao@hotmail.com