[微积分学] 二重积分计算简要

引言

一模刚过，写个极短篇水一下。

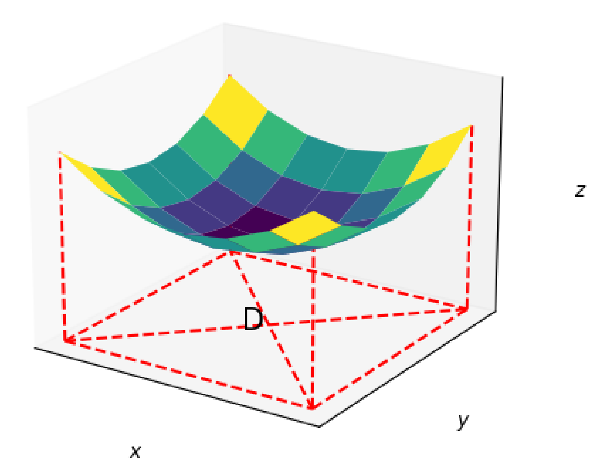
突然又写如此返璞归真的题材，那无邪、单纯、质朴的微积分学，是因为我前段时间给一位初二的朋友解释了多元（二元为主）积分相关的概念和累次积分的方法，难得回忆，简记一下内容。

二重积分及计算

我们希望将一元函数的积分的概念推广到多元函数，类似于用定积分表示函数图像与横轴之间的某区域的面积那样。于是就有了重积分的概念，来定义多元函数在一个多维区域上的积分。

概念及定义

二重积分是对二元函数在一个有限区域上的积分。我们知道二元函数在三维空间中可以表示为一个曲面，所以同理于求一元函数曲线下的面积，我们使用二重积分求的是区域内曲面下的体积。曲面下的体积对应的柱体我们称之为曲顶柱体。



如图的曲面是非负的二元函数 $f(x,y)$，我们以曲面为顶，作为底的区域 D 是二元函数曲面在平面 xy 的投影，其侧面是 D 的边界的柱面。

我们再设 $\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 这样的二重积分表示为：

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

在一元函数中，我们通过取样分割来定义其积分，这个做法同样可以推广到二元情况。我们在区域 D 分割 n 个互不相交的区域 $\Delta\sigma_i$，并在每个 $\Delta\sigma_i$ 中取一点 (x_i, y_i)，则有每个分割的底所对应的曲顶柱的体积的近似的和式：

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i$$

再令 $\max\{d\sigma_i\} = \max_{0\le i\le n} d(\Delta\sigma_i)$，注意字体，这里 $\max_{0\le i\le n} d(\Delta\sigma_i)$ 指的是每个分割部分的直径的最大值。然后我们取极限得到：

$$\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}\sigma = \lim_{\max\{d\sigma_i\}\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i$$

一个在有界闭区域 D 上连续的函数必定可积。反过来，在有界闭区域 D 上的可积函数必定是 D 上的有界函数。

累次积分转化

对于多重积分，我们尝试直接依靠定义来计算是不现实的，因此我们要考虑另一种更为人性化的方法——将多重积分转换为累次积分，就例如把二重积分转换为二次积分，这是可行的。

矩形区域

先说最简单的，积分区域是矩形的情况，我们可以很容易地将二重积分化为二次积分。

考虑在闭矩形 $R = [a, b] \times [c, d]$ 上的 $f(x, y)$ 可积，表示为：

$$\iint_R f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

矩形可以既可以水平也可以竖直地直接被分割，然后进行积分，所以我们利用黎曼和的概念，我们可以很简单地将矩形先后在两个数轴方向进行积分 我们可以直接把双重积分转为：

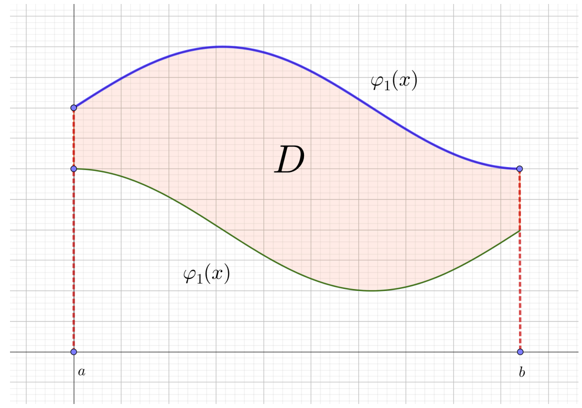
$$\iint_R f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y$$

> 注意上式中的 $\int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y$ 或者 $\int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x$ 是含参积分

直角坐标系

尽管是更不规则的积分区域，在直角坐标系下二重积分的定义保证了我们只需要想办法把积分区域给“积累个遍”就行了。这种思路一般会被分为两种，区别在于对横轴和纵轴上的积分的定义。

由图可知，这种积分方法要求积分区域用平行于自变量轴的直线穿过其内部时，直线与区域边界的相交少于等于两处。我们考虑一个积分区域 D 和在 D 上连续的 $f(x,y)$



定义积分区域 D 为 $a \le x \le b$，$\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$，其中 φ_1, φ_2 在 $[a,b]$ 中连续。由二重积分定义可知，则对应的曲顶柱体积为 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其平行截面的面积为：

$$S(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

因此：

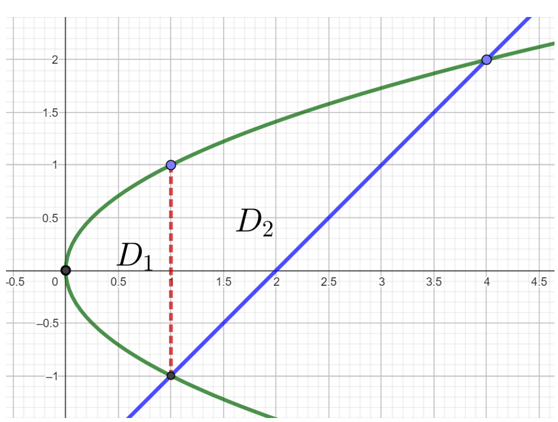
$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b S(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

也可以表示为：

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

如果我们对积分区域的定义是 $c \le y \le d$，$\varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y)$，那定义也是类似的，函数 $\phi_1(y), \phi_2$ 在 $[c,d]$ 上连续，则：

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$



当我们没法用一个表达式来表示积分区域时，可以使用分割的方法。

来个随处可见的典例，如图是函数 $f: x = y^2$ 和 $g: y = x - 2$，求 $\iint_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

很显然图中它们围成的积分区域的下方曲线是没法用单个表达式来处理的，所以我们在 $x = 1$ 处对其进行分割，变成 $D = D_1 + D_2$，定义为：

$$D_1 = 0 \le x < 1, -\sqrt{x} \le y \le \sqrt{x}$$

$$D_2 = 0 \le x < 4, x-2 \le y \le \sqrt{x}$$

来分别算一下：

$$\iint_{D_1} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

对于区域 D_2，积分形式为：

$$\iint_{D_2} xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^4 \int_{x-2}^{\sqrt{x}} xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

所以加在一起得到：

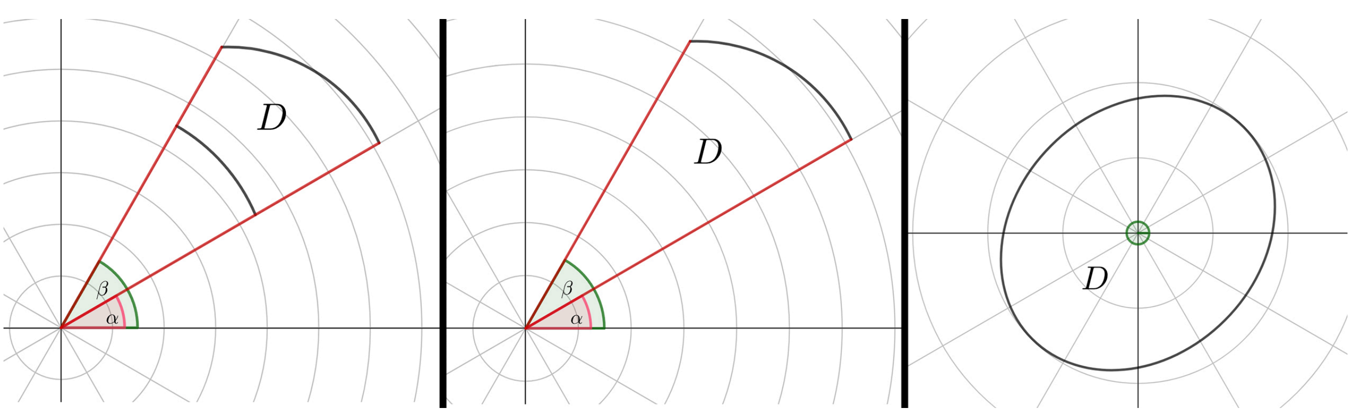
$$\begin{aligned}\iint_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_1^4 \int_{x-2}^{\sqrt{x}} xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x & (1)\\ &= \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2}\right]_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x + \int_1^4 \left[x-(x-2)^2\right]\cdot\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x & (2)\\ &= 5\frac{5}{8} & (3)\end{aligned}$$

极坐标

　或者有一些积分区域是直角坐标系表示不了的，但转换为极坐标形式就变成了一个很简单的区域。

这种时候，我们对区域 D 的描述主要有三大类：

1. $\alpha \le \theta \le \beta,\ \varphi_1(\theta) \le r \le \varphi_2(\theta)$
2. $\alpha \le \theta \le \beta,\ 0 \le r \le \varphi_2(\theta)$
3. $0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le \varphi_2(\theta)$



先说最简单硬套公式的变换：

1. 积分区域在两角边的夹角 θ 范围内，由两个曲线围成，积分为：

$$\iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_\alpha^\beta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

2. 积分区域在两角边的夹角 θ 范围内，由一条曲线围成，积分为：

$$\iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_\alpha^\beta \int_0^{\varphi(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

2. 极点在积分区域的内部：

$$\iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\varphi(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

2,3 说到底也只是 1 的变体，只要有办法讲积分区域转换成这样的形式就行了，上述变换也是很符合直觉的。

来解释一下这坨东西是怎么来的。

补充定义：考虑函数 $\mathbf{f}:\mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_m$，将映射 $\mathbf{x}=[x_1,x_2,\ldots,x_n], \mathbf{x}\in\mathrm{R}^n$ 转换到 $\mathbb{R}^m$，即 $f(\mathbf{x})\in\mathbb{R}^m$， $\mathbf{f}$ 的各个分量函数为：

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) \\ y_2 = f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n) \\ \vdots \\ y_m = f_m(x_1,x_2,\ldots,x_n) \end{cases}$$

那么雅各比矩阵表示为：

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

当雅可比矩阵是方形矩阵时，我们称之为雅可比行列式。在二维的情况下，我们需要的是从屏幕直角坐标系到极坐标系的变换雅可比矩阵，设可逆变换 $T:(x,y)\to(r,\theta)$

$$J=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|=\begin{vmatrix}\cos(\theta) & -r\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & r\cos(\theta)\end{vmatrix}$$

然后得到:

$$|J|=r\cos^2(\theta)+r\sin^2(\theta)=r$$

前面我们直接提及的公式，其实就是上述结果带进去的:

$$\int_{\alpha}^{\beta}\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)|J(r,\theta)|\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

其实是很符合直觉的，其中的积分元素 $r\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$ 表示的就是一个由极径 r 和 极角 θ 确定的微小的扇环/扇形的面积元素。

就如直角坐标系中的累次积分转换那样，我们也可以直接交换 r 和 θ 的积分顺序进行计算，对积分区域的定义变成了 $\alpha\le r\le\beta$ 几何意义上的变化就变成了我们先沿着半径扫过圆环状的区域，然后对每个环状区域进行极角方向上的积分。

对称性与奇偶性

函数的奇偶性决定了被积函数的变量正负是否变化，类似于我们可以利用它归纳某些二重积分的计算。

考虑积分区域 D 关于 x 轴对称，定义:

$$D_1=\{(x,y)|(x,y)\in D,x\ge 0\}$$

则我们可以分为两种情况讨论:

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\begin{cases}2\iint_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y & f(x,-y)=f(x,y)\\ 0 & f(x,-y)=-f(x,y)\end{cases}$$

反之，若积分区域 D 关于 y 轴对称，定义:

$$D_2=\{(x,y)|(x,y)\in D,y\ge 0\}$$

就有:

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \begin{cases} 2\iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y & f(-x,y)=f(x,y) \\ 0 & f(-x,-y)=-f(x,y) \end{cases}$$

这也很符合直觉，如果积分区域在某个数轴上是对称的，而被积函数是奇函数，因为对称性使得积分区域内函数的正值和负值部分相互抵消，所以积分结果直接为零。同理，偶函数的性质决定了它对于关于某个数轴对称时，只需计算正半轴上方的部分的积分，然后将结果乘二即可得到整个积分的值。

若将 x, y 对调后积分区域 D 不变，则我们称 D 关于 $x=y$ 对称，此时：

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D f(y,x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\iint_D (f(x,y)+f(y,x))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

我们称这个性质为轮换对称性。也很简单，针对的是矩形或圆形一类的交换变量的积分顺序积分也不变的图形的积分区域。

随便练点

(1) 积分区域 D 是单位正方形 $[0,1]\times[0,1]$，计算：

$$\iint_D e^{x+y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(2) 积分区域 D 是由直线 $y=x$，$y=2x$，$x=1$ 所围成的区域，计算：

$$\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(3) 积分区域 D 是由抛物线 $y=x^2$ 和直线 $y=4$ 所围成的区域，计算：

$$\iint_D e^{x+y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(4) 证明二重积分的对称性：如果被积函数 $f(x,y)$ 具有轮换对称性，那么 $\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}A = \iint_R f(y,x)\,\mathrm{d}A$。

本人在放学的车上仍然坚持手机打 Latex 水文章的精神是多么可贵，这不，回家开电脑画俩图就能发了。

Ouyang Anqiao 16:32 30/04/2024

gzanqiao@hotmail.com